R. FRIEDLÄNDER & SOHN
BERLIN
11. Carlstrasse 11.

Digitized by the Internet Archive
in 2026 with funding from
University of Toronto

https://archive.org/details/einbeitragzurhhe00sond

As
S

EIN BEITRAG

ZUR

HÖHERN GEODÄSIE

VON

A. SONDERHOF.

SEPARATABDRUCK AUS DER ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

91947
1719108

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1872.

SCHOOL OF PRACTICAL SCIENCE TORONTO

Vorrede.

In den letzten Decennien hat sich auf allen Gebieten der praktischen Geometrie ein regeres Leben bemerkbar gemacht. Eine grosse Anzahl von Landesvermessungen, hervorgerufen durch die gesteigerten agrarischen Bedürfnisse der Neuzeit, ist in der Ausführung begriffen oder bereits ausgeführt worden; und was die höhere Geodäsie betrifft, so ist es die Europäische Gradmessung, welche allgemeines Interesse geweckt und viele Kräfte angeregt hat. — Eine solche erhöhete Thätigkeit auf irgend einem Gebiete des menschlichen Wissens und Wirkens kann niemals spurlos vorübergehen; sie hat stets eine Anzahl von neuen Erfindungen und Verbesserungen im Gefolge. In dieser Beziehung lässt sich, soweit es die niedere Geodäsie betrifft, Mehreres erwähnen, z. B. die Einführung der Theodoliten mit mikroskopischer Ablesung, die Planimeter von Hansen, Trunk und Amsler, verschiedene Verbesserungen an Cirkel- und Abschiebe-Instrumenten u. dgl. m. — Was die Methoden anlangt, deren man sich in der Feldmesskunst bedient, so gehen die Ansichten nach wie vor auseinander: in manchen Ländern gebraucht man den Theodolit, in anderen den Messtisch zur speciellen Triangulation. Bemerkenswerth ist in ersterer Hinsicht die Landesvermessung zu Schwarzburg-Sondershausen, wo man die Triangulation so weit ins Specielle ausdehnte, dass auf je 12 bis 14 Morgen ein trigonometrischer Punkt kam. Es wurden dabei zum Theil Theodoliten mit mikroskopischen Ablesungen verwandt. Eine wissenschaftliche Ausgleichung der Beobachtungsfehler fand im Allgemeinen nicht statt. — Die Erfahrung hat gelehrt, dass sich auf diese Weise befriedigende Resultate erzielen lassen, aber als ein Muster kann eine solche Landesvermessung nicht hingestellt werden. Eine beträchtliche Anhäufung der trigonometrisch bestimmten Punkte hat stets erhebliche Fehler in den berechneten Seiten und Coordinaten zur Folge, und wenn diese Fehler nicht nach einem wissenschaftlichen Verfahren ausgeglichen werden, so treten sie in der Specialmessung deutlich hervor. Die Sondershäuser Messtischführer, welche die Ortslagen zu vermessen hatten, haben öfters Gelegenheit gehabt, das zu beobachten. Uebrigens ist das Bedürfniss einer guten Fehlerausgleichung solcher Triangulationen schon mehrseitig erkannt worden, wie z. B. die technische Anleitung zur Ausführung der bei den Preussischen Grundsteuervermessungsarbeiten vorkommenden trigonometrischen Rechnungen beweist.

Wenn nun auch nicht bestritten werden kann, dass ein gut ausgeglichenes trigonometrisches Netz grössere Genauigkeit gewährt, als eine graphische Triangulation, so muss ich doch der Ansicht entgegentreten, dass — vom Standpunkte der niedern Geodäsie aus betrachtet — die Methode der trigonometrischen Triangulation die beste sei. Der beträchtliche Mehraufwand an Zeit, Kosten und Arbeitskräften, den sie erfordert, überwiegt den kleinen Nutzen einer um ein Weniges grösseren Genauigkeit zu ihrem Nachtheile. Nach meinem Dafürhalten verdient die graphische Triangulation, basirt auf geeigneter trigonometrischer Grundlage, den Vorzug. Da, wo sich der Kettenmessung bedeutende Hindernisse entgegenstellen, wie im gebirgigen Terrain, in Sumpfgegenden, in Ortschaften u. s. w., ist der Messtisch unstreitig das beste Instrument.

In Schwarzburg-Sondershausen wurden die Messtischmessungen als die geringsten Arbeiten betrachtet, und den Messtischführern blieben, trotz ihrer schwierigen Arbeiten, manche Vortheile vorenthalten, die anderen Geodäten gewährt worden sind. Solche Maximen, einzelne Arbeiten unangemessen zu remuneriren, schädigen die Feldmesser und die Feldmesskunst; sie haben zur Folge, dass sich die tüchtigen Arbeitskräfte nicht gleichmässig vertheilen und einzelne Zweige vernachlässigt werden. Zu verbessern giebt es aber in allen Theilen der niedern Geodäsie, nicht allein für den Trigonometer, sondern auch für den Messtischführer (z B. an der Kippregel), für den Flächenberechner (am Planimeter) oder für den Kartirer (am Abschiebeinstrumente), und alle diese Arbeiten sind gleich wichtig. Es ist ein grosser Irrthum, wenn bei der Beurtheilung der Feldmesskunst, wie es öfters geschieht, die mathematische Theorie als Massstab angenommen wird. Nicht die Theorie, sondern die Praxis ist das Schwierigere. Mehrjährige Uebungen und Erfahrungen sind nöthig, bevor das Auge befähigt wird, die kleinsten räumlichen Grössen zu erfassen und zum Bewusstsein zu bringen, bevor die Hand geschickt wird zur sichern Führung der Instrumente, bevor der Beobachter im Stande ist, die wichtigsten Fehlerquellen zu beurtheilen und, so weit es möglich, zu vermeiden oder auszugleichen. Und wenn alle diese Schwierigkeiten überwunden sind, so wird die Ausführung immer noch nicht leicht, weil sie, wenigstens in ihren wichtigeren Theilen, unausgesetzt die angestrengteste Aufmerksamkeit erfordert.

Was nun die höhere Geodäsie betrifft, so hat die Neuzeit auch manche Verbesserungen aufzuweisen. Ich erwähne hier die Einführung des Telegraphen zur Längenbestimmung, wodurch es möglich geworden ist, diese Winkelgrösse weit leichter und unter Umständen

auch genauer zu ermitteln, als es vorher geschehen konnte. Eine grössere Anzahl der Längenbestimmungen ist aber deshalb wichtig, weil man dadurch eine schärfere Controle für das astronomische Netz gewinnt.

Es ist neuerdings auch wieder die Frage zur Erörterung gekommen, welche Curve am vortheilhaftesten zu den Rechnungen auf dem Sphäroid zu verwenden sei. So finden wir in den „Studien über höhere Geodäsie“ von Dr. Bremiker die schon früher angeregte Idee weiter verfolgt, die geodätische Linie ganz zu vermeiden und nach der Sehnenmethode zu rechnen. Ferner ist nebenbei darin die Ansicht ausgesprochen, dass eigentlich nicht die geodätische Linie, sondern die Feldlinie die Operationsbasis des Geodäten bilde. Die Letztere habe vor der Ersteren noch die Vortheile, dass ihre Azimuthe mit den Azimuthen der Verticalschnitte übereinstimmten und dass ihre Gleichung in geschlossener Form darstellbar sei. Die erwähnten Vorzüge der Feldlinie halte ich nicht für begründet, weil dieser Curve Eigenschaften zugeschrieben worden sind, die sie nicht besitzt — oder besser, weil sie eigentlich noch gar nicht scharf definirt worden ist. Wird die Feldlinie in der Weise construirt, dass man, ähnlich wie bei der Kettenmessung, den folgenden Punkt immer nach dem Endpunkte der Linie einvisirt, so hat sie zwar gleiche Azimuthe mit den Verticalschnitten, dagegen stimmt die Annahme nicht, dass sie eine zu beiden Punkten gleichliegende Linie sei. Man überzeugt sich davon leicht, sobald man nur drei auf einander folgende Punkte betrachtet; denn unter dieser Voraussetzung fallen die beiden Feldlinien mit den beiden Verticalschnitten zusammen. — Construirt man ferner die Feldlinie so, dass man jeden Punkt derselben „aus der Mitte der Stationen“ einrichtet, d. h. nach der Flächennormale bestimmt, welche mit den beiden Endpunkten in Einer Ebene liegt, so bildet sie zwar eine eindeutige Curve; sie besitzt aber Azimuthe, welche von denen der Verticalschnitte verschieden sind. Auch das lässt sich leicht aus der Betrachtung dreier auf einander folgender Punkte erkennen. — Schliesslich soll die Feldlinie noch die Eigenschaft haben, dass jedes Curvenelement mit der zugehörigen Flächennormale eine Ebene bildet, welche die beiden Endpunkte trifft. Eine solche Eigenschaft besitzt jedoch, wenn man von der Meridianlinie abstrahirt, keine einzige Curve auf dem Sphäroid.

Daraus geht hervor, dass die erwähnten Vortheile der Feldlinie nicht existiren. Uebrigens könnte diese Curve auch dann, wenn sie die gedachten Vorzüge hätte, mit der geodätischen Linie nicht concurriren, weil sich die Letztere in weit einfacherer Weise analytisch entwickeln lässt

Unter den Curven, die zu geodätischen Zwecken benutzt werden können, scheint mir, neben der kürzesten Linie, vorzugsweise die Rolllinie beachtenswerth zu sein. Sie entsteht dadurch, dass man eine gleichartig gekrümmte, geschlossene Fläche über eine Ebene rollt, ohne die Richtung der Rotationsaxe zu ändern, oder auch in der Weise, dass man auf einer beliebigen Fläche eine Tangente parallel mit sich verschiebt. Für den speciellen Fall der Fläche zweiten Grades habe ich die in Rede stehende Linie aus Gründen, welche in der nachfolgenden Abhandlung entwickelt werden, Centralschnitt genannt. Im dritten Capitel sind die vorzüglichsten Eigenschaften des Centralschnitts erörtert und auch die wichtigsten geodätischen Aufgaben mittels dieser Linie gelöst worden, und zwar in der Weise, dass die sphäroidischen Dreiecke ohne Aenderung der Polhöhen und Längen auf sphärische Dreiecke reducirt werden. — Das Rechnungsverfahren bietet keine grossen Schwierigkeiten dar und kann sich anderen, bisher gebräuchlichen Methoden zur Seite stellen. Alle beobachteten Grössen treten unmittelbar in die Formeln ein, und alle Formeln geben das Gesuchte direct. Die wichtigsten Gleichungen sind allgemein abgeleitet worden und können deshalb auch auf das dreiaxige Ellipsoid bezogen werden; speciell entwickelt wurden sie jedoch nur für das zweiaxige Ellipsoid.

Bei der Ausarbeitung des Nachfolgenden leitete mich die Idee, das Flächenganze durch die Flächenelemente zu ermitteln. Weil man nun nicht das Flächenelement an sich, sondern nur die Flächennormalen messen kann, so wurde ich dadurch auf die im ersten Capitel abgehandelte Theorie der Linienvielecke geführt. Man findet darin das Verfahren erläutert, nach welchem sich ein System von Linien durch geodätische Messungen ermitteln lässt. Im zweiten Capitel wird das Flächenelement discutirt und zugleich nachgewiesen, wie dasselbe aus der Lage der benachbarten Normalen bestimmt werden kann. Das dritte Capitel handelt vom Ellipsoid und erörtert hauptsächlich die Eigenschaften und die Anwendung des Centralschnitts. Im vierten Capitel endlich wird das Verfahren angedeutet, wodurch man zur Kenntniss desjenigen dreiaxigen Ellipsoids gelangen kann, welches sich der Erdoberfläche am innigsten anschliesst. Eine eingehendere Behandlung der letztgedachten Aufgabe muss ich mir für spätere Zeiten vorbehalten.

Geschrieben zu Rohnstedt, im August 1871.

A. Sonderhof.

Inhalts-Verzeichniss.

Cap. I. Einiges über die Linienvielecke.

Seite

§ 1. Erklärung 1
§ 2. Das Linienzweieck 2
§ 3. Das Linienpaar 8
§ 4. Das Liniendreieck 9
§ 5. Die Axen des Liniendreiecks 13
§ 6. Die Berechnung des Liniendreiecks 14
§ 7. Das geschlossene Liniendreieck 15
§ 8. Das Linienviereck 20
§ 9. Ueber die Anwendung der Linienvielecke 22

Cap. II. Das Flächenelement.

§§ 1—3. Krümmung und conjugirte Tangenten . . . . . 24—27
§ 4. Benachbarte Normalen 29
§ 5. Richtung der Hauptschnitte und locale Polhöhen 31
§ 6. Die Centrale 34
§ 7. Die Torsion der Hauptschnitte 36
§ 8. Das Flächenelement 38
§ 9. Die Ermittelung des Flächenelements 39

Cap. III. Das Ellipsoid.

A. Das Sphäroid.

§ 1. Gleichung des Ellipsoids 41
§ 2. Das Linienzweieck: a) die Pollinie; b) Länge der Axe; c) der kürzeste Abstand; d) die Grössen r_1 und r_2; e) die sphärische Correction . . . 42
§ 3. Der Unterschied zwischen den sphärischen Correctionen w_1 und w_2 . . . 47
§ 4. Numerisches Beispiel 48
§ 5. Centrale und Centralschnitt 50
§ 6. Winkel zwischen der Normale und Centrale 51
§ 7. Winkel zwischen dem Normal- und Centralschnitt 52
§ 8. Eine andere Ermittelung der sphärischen Correction 53
§ 9. Fortgesetzte Untersuchung des Centralschnitts 56
§ 10. Die Flächenkrümmungsradien des Centralschnitts 58
§ 11. Rectification des Centralschnitts 61
§ 12. Ermittelung des Winkels zwischen den Flächennormalen, wenn die Länge des Centralschnitts gegeben ist 64
§ 13. Entwickelung der Constanten 67

Seite

§ 14. Numerisches Beispiel 68
§ 15. Längenunterschied zwischen dem Central- und Normalschnitt 70
§ 16. Rectification des Normalschnitts 73
§ 17. Nochmals die sphärische Correction 76
§ 18. Uebertragung der Coordinaten 77

B. Einiges über das dreiaxige Ellipsoid.

§ 19. Die Grössen am Pole der Z-Axe 78
§§ 20 und 21. Die Krümmungsradien eines beliebigen Punktes 79, 80
§ 22. Meridian, Mittagslinie und Hauptschnitte 81
§ 23. Der Winkel zwischen den conjugirten Tangenten beliebiger Richtungen . 83
§ 24. Azimuth des Centralschnitts und sphärisches Azimuth 84
§ 25. Numerisches Beispiel 85
§ 26. Winkel zwischen der Centrale und Normale 85
§ 27. Der Winkel zwischen dem Meridian und der Centralebene 86
§ 28. Winkelunterschied zwischen dem Central- und Normalschnitt 87
§ 29. Die sphärische Correction 88
§ 30. Rectification des Centralschnitts 88

Cap. IV. Die Ermittelung der Fläche.

§ 1. Das geodätische Netz 90
§ 2. Ausgleichung der astronomischen Beobachtungen 91
§ 3. Ermittelung des Sphäroids 92
§ 4. Ermittelung kleiner Flächentheile 92
§ 5. Ermittelung des dreiaxigen Ellipsoids 93
§ 6. Schlussbemerkungen 94

Cap. I.

Einiges über die Linienvielecke.

§ 1.

Unter einem Linienvieleck soll ein System von geraden Linien verstanden werden, welche jede beliebige Lage gegen einander haben können. Als einzelne Theile desselben sind zu betrachten:

1. die Kanten, d. h. die Linien, durch welche das Vieleck gebildet wird;
2. die Seiten, d. h. die Winkel, welche von je zwei Kanten eingeschlossen werden;
3. die Winkel des Vielecks, d. h. diejenigen, welche die Linien der kürzesten Abstände oder die Pollinien zu Schenkeln haben;
4. die kürzesten Abstände;
5. die Strecken, welche durch die kürzesten Abstände auf den Kanten begrenzt werden und die man Poldistanzen nennen kann.

Die Lehre von den Linienvielecken bietet eine grosse Mannichfaltigkeit an verschiedenen Formen und Relationen, sie betrachtet das Vieleck — insofern man dabei an eine Verbindung von geradlinigen Elementen denkt — vom allgemeinsten Gesichtspunkte aus und schliesst die Discussion der körperlichen Ecke und des ebenen Dreiecks als besondere Fälle ein. Es empfiehlt sich in mancher Hinsicht und ist in Bezug auf den vorliegenden Zweck sogar unerlässlich, das Vieleck auf eine gerade Linie zu beziehen, welche sämmtliche Kanten schneidet. Ein solche Linie soll die Axe des Systems genannt werden. Diese Definition gilt jedoch nur für Vielecke von mässiger Seitenzahl; sie erleidet eine Aenderung, sobald ein grösseres Liniensystem betrachtet wird, wie die folgenden Untersuchungen zeigen werden.

§ 2. Das Linienzweieck.

Man betrachte die erste Kante als die Y-Axe, die Pollinie als die Z-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems und nehme die positive Richtung der X-Axe nach derjenigen Seite hin, wo sich die positiven Y-Coordinaten der zweiten Kante befinden; nach derselben Richtung rechne man auch den Winkel v positiv, welchen eine durch die Y-Axe gelegte Ebene mit der Z-Axe bildet; man bezeichne ferner den Winkel, welchen beide Kanten einschliessen, mit ∂ und den kürzesten Abstand mit k. Es folgen dann für die erste und zweite Kante beziehungsweise die Gleichungen

1)
$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & y_1 &= y_1, & z_1 &= 0, \\ x_2 &= k.tg\,v, & y_2 &= k.tg\,v\ cotg\,\partial, & z_2 &= k. \end{aligned}$$

Nimmt man auf beiden Kanten bestimmte Punkte $y = h_1$ und $v = v_1$ an und verbindet sie durch eine Axe, so erhält man aus den 1) ohne Weiteres die Gleichung dieser Linie, nämlich

2)
$$\frac{x}{k.tg\,v_1} = \frac{y - h_1}{k.tg\,v_1\ cotg\,\partial - h_1} = \frac{z}{k}.$$

Mit h_1 wurde die Entfernung zwischen dem Pol und der Axe auf der ersten Kante bezeichnet. Nennt man die entsprechende Grösse auf der zweiten Kante h_2, so folgt aus den 1):

$$h_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = k.tg\,v_1\ cosec\,\partial.$$

Einen analogen Ausdruck erhält man für h_1, sobald der Winkel v_2 eingeführt wird, welcher für die zweite Kante dieselbe Bedeutung hat, wie v_1 für die erste. Stellt man demnach die betreffenden Gleichungen zusammen, so kommt

3)
$$h_1 = \frac{k.tg\,v_2}{sin\,\partial}, \quad h_2 = \frac{k.tg\,v_1}{sin\,\partial}, \quad h_1\,tg\,v_1 = h_2.tg\,v_2.$$

Diese Relationen können dazu verwandt werden, den 2) eine andere Gestalt zu geben. Eliminirt man nämlich in den ersten beiden Gliedern der 2) die Grösse k, so folgt

4)
$$\frac{x}{h_2\,sin\,\partial} = \frac{y - h_1}{h_2\,cos\,\partial - h_1} = \frac{z}{k}.$$

Aus den Nennern dieser Ausdrücke lässt sich die Länge l der Axe ableiten, wenn man darunter die Strecke versteht, welche durch die beiden Kanten abgeschnitten wird. Es ist nämlich

$$l = \sqrt{h_2^2\,sin\,\partial^2 + (h_2\,cos\,\partial - h_1)^2 + k^2}$$

oder

$$l = \sqrt{k^2 + h_1^2 + h_2^2 - 2.h_1 h_2\,cos\,\partial}$$

5)
$$= \frac{k}{sin\,\partial}\sqrt{sin\,\partial^2 + tg\,v_1^2 + tg\,v_2^2 - 2\,.\,tg\,v_1\,tg\,v_2\,cos\,\partial}.$$

Dividirt man die drei Nenner der Glieder in den 4) durch l, so erhält man die Cosinus der Richtungswinkel der Axe. Die Richtungen der Kanten sind aus den 1) sofort zu entnehmen. Stellt man diese drei Linien zusammen, so erhält man folgendes System:

6)
$$\begin{array}{lccc} \text{Erste Kante:} & 0, & 1, & 0. \\ \text{Zweite} \quad ,, & \sin\partial, & \cos\partial, & 0. \\ \text{Axe:} & \dfrac{h_2 \sin\partial}{l}, & \dfrac{h_2 \cos\partial - h_1}{l}, & \dfrac{k}{l}. \end{array}$$

Daraus findet man die Winkel, welche die Axe mit den Kanten bildet. Bezeichnet man sie mit $90-\pi_1$ und $90-\pi_2$, so folgt

7)
$$\sin\pi_1 = \frac{h_2 \cos\partial - h_1}{l}, \quad \sin\pi_2 = \frac{h_2 - h_1 \cos\partial}{l}.$$

Löst man diese Gleichungen nach h auf, so kommt ferner

8)
$$\frac{h_1}{l} = \frac{\sin\pi_2 \cos\partial - \sin\pi_1}{\sin\partial^2}, \quad \frac{h_2}{l} = \frac{\sin\pi_2 - \sin\pi_1 \cos\partial}{\sin\partial^2}.$$

Aus den Gleichungen 7) erhält man weiter, wenn man quadrirt, von 1 subtrahirt und dann radicirt:

$$\cos\pi_1 = \sqrt{\frac{l^2 - h_1^2 - h_2^2 + 2\,h_1 h_2 \cos\partial - k^2 + k^2 + h_2^2 \sin\partial^2}{l^2}} = \frac{k}{l \cos v_1},$$

$$\cos\pi_2 = \sqrt{\frac{l^2 - h_1^2 - h_2^2 + 2\,h_1 h_2 \cos\partial - k^2 + k^2 + h_1^2 \sin\partial^2}{l^2}} = \frac{k}{l \cos v_2}.$$

Daher kommt schliesslich

9)
$$\frac{k}{l} = \cos\pi_1 \cos v_1 = \cos\pi_2 \cos v_2.$$

Andere Winkelgleichungen erhält man aus den 8), wenn h und l mittels der 3) und 9) eliminirt werden, nämlich:

10)
$$\sin\pi_1 = \sin\pi_2 \cos\partial - \cos\pi_2 \sin\partial \sin v_2;$$

11)
$$\sin\pi_2 = \sin\pi_1 \cos\partial + \cos\pi_1 \sin\partial \sin v_1.$$

Nunmehr bleibt noch der Winkel zu bestimmen, welchen die beiden durch die Axe und je eine Kante gelegten Ebenen mit einander bilden. Zu diesem Behufe sind die Richtungen zu ermitteln, welche auf jenen Ebenen senkrecht stehen. Man findet aus den 6) für die Cosinus der betreffenden Richtungswinkel folgende Ausdrücke:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{k}{l \cos\pi_1}, & 0, & \dfrac{-h_2 \sin\partial}{l \cos\pi_1}, \\ \dfrac{k \cos\partial}{l \cos\pi_2}, & \dfrac{-k \sin\partial}{l \cos\pi_2}, & \dfrac{-h_1 \sin\partial}{l \cos\pi_2}, \end{array}$$

welche nach Elimination der linearen Grössen folgende Werthe annehmen:

$$\begin{array}{ccc} \cos v_1, & 0, & -\sin v_1, \\ \cos v_2 \cos\partial, & -\cos v_2 \sin\partial, & -\sin v_2. \end{array}$$

Durch Multiplication der zusammengehörigen Glieder erhält man den gesuchten Winkel λ durch die Gleichung

12) $$\cos\lambda = \sin v_1 \sin v_2 + \cos v_1 \cos v_2 \cos\partial.$$

Endlich kann man aus den 7), wenn das Product $\sin\pi_1 \sin\pi_2$ entwickelt wird, noch folgende Relation ableiten:

13) $$\cos\partial = \sin\pi_1 \sin\pi_2 + \cos\pi_1 \cos\pi_2 \cos\lambda.$$

In Rücksicht auf die Anwendung der vorstehenden Formeln sollen die Winkel bald diejenigen Benennungen erhalten, welche gebräuchlich sind, sobald ein System von Linien auf eine gemeinschaftliche Rotationsaxe bezogen wird. Demnach würde also der Winkel π die Polhöhe, λ die Länge und v das Azimuth zu nennen sein.

Anstatt der bisher betrachteten Azimuthe der Pollinien kann man andere einführen, welche ebenso fest mit dem Linienzweieck verbunden sind. Lässt man nämlich in den Gleichungen 3) den Winkel v wachsen bis zu 90^0, so wird $h = \infty$. Die durch die eine Kante gelegte Ebene schneidet daher in diesem Falle die andere Kante in unendlicher Entfernung, d. h. sie ist parallel mit derselben. Bezeichnet man nun die Azimuthe, welche dieser bestimmten Richtung entsprechen, mit α_1 und α'', so hat man die einfachen Relationen

$$\alpha_1 = 90 - v_1, \quad \alpha'' = 90 - v_2.$$

Beide Winkel sind aber von verschiedenen, einander entgegengesetzten Richtungen des Meridians aus gerechnet. Bezieht man sie auf ein und dieselbe Richtung und bezeichnet den Nebenwinkel von α'' mit α_2, so kommt

14) $$\alpha_1 = 90 - v_1, \quad \alpha_2 = 90 + v_2.$$

Werden nun diese Winkel statt der v eingeführt, so gehen die Gleichungen 3), 9) bis 13) in folgende über:

III) $$h_1 = \frac{-k}{\sin\partial \operatorname{tg}\alpha_2}, \quad h_2 = \frac{k}{\sin\partial \operatorname{tg}\alpha_1},$$

IX) $$\frac{k}{l} = \cos\pi_1 \sin\alpha_1 = \cos\pi_2 \sin\alpha_2,$$

X) $$\sin\pi_1 = \sin\pi_2 \cos\partial + \cos\pi_2 \sin\partial \cos\alpha_2,$$

XI) $$\sin\pi_2 = \sin\pi_1 \cos\partial + \cos\pi_1 \sin\partial \cos\alpha_1,$$

XII) $$\cos\lambda = -\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\partial,$$

XIII) $$\cos\partial = \sin\pi_1 \sin\pi_2 + \cos\pi_1 \cos\pi_2 \cos\lambda.$$

Durch die Substitution der Winkel α sind, wie die letzten Ausdrücke zeigen, die gebräuchlichen sphärischen Formeln entstanden. Diese Winkel sollen daher die sphärischen Azimuthe des auf eine Axe bezogenen Linienzweiecks genannt werden. Dieselben sind von einer bestimmten Richtung des Meridians aus gerechnet und übersteigen 180^0 nicht.

Wenn zur Ermittelung des Linienzweiecks drei Stücke des sphärischen Hilfsdreiecks und ausserdem irgend eine der linearen Grössen k, l oder h gegeben sind, so lassen sich in bekannter Weise alle übrigen Winkel und

nach den einfachen Formeln III) und IX) auch die fehlenden Längen leicht berechnen. Anders gestaltet sich die Sache, sobald das sphärische Dreieck nicht bekannt ist und anstatt der sphärischen Azimuthe beliebige andere gegeben sind. Dann macht es sich nöthig, zuvor die Relationen zwischen diesen Winkeln zu ermitteln.

Setzt man in den 3) für h_1, h_2, v_1, v_2 jetzt die Zeichen r_1, r_2, v', v'', so kommt

14a) $$r_1 = \frac{k \,.\, tg\, v''}{sin\, \partial}, \quad r_2 = \frac{k \,.\, tg\, v'}{sin\, \partial}.$$

r_1 und r_2 sind die Entfernungen vom Pole der Kante bis zu dem Punkte, nach welchem das Azimuth von der andern Kante aus genommen worden ist; v' und v'' hingegen bedeuten die Winkel, um welche man die durch eine Kante gelegte Ebene von der Pollinie ab zu drehen hat, bis sie den Endpunkt von r auf der andern Kante trifft. Addirt man zu diesen Winkeln die Azimuthe der Pollinie, nämlich die Grössen v_1 und v_2, so erhält man die gesuchten Azimuthe. Sie sollen geodätische Azimuthe genannt werden. Bezeichnet man dieselben mit a_1 und a_2, so folgt demnach

X) $$a_1 = v' - v_1, \quad a_2 = 180 - v'' + v_2.$$

Subtrahirt man diese Gleichungen von den 14), so kommt ferner

$$\alpha_1 - a_1 = 90 - v', \quad \alpha_2 - a_2 = v'' - 90,$$

oder wenn $90 - v' = w_1$ und $90 - v'' = w_2$ gesetzt wird:

15) $$\alpha_1 - a_1 = w_1, \quad \alpha_2 - a_2 = -w_2.$$

Für w_1 und w_2 folgen die Ausdrücke

16) $$w_1 = 90 - arctg \,.\, \frac{r_2 \,.\, sin\, \partial}{k}, \quad w_2 = 90 - arctg \,.\, \frac{r_1 \,.\, sin\, \partial}{k}.$$

Die Grössen w_1 und w_2 kann man die sphärischen Correctionen nennen, weil sie den Uebergang vom geodätischen zum sphärischen Azimuth vermitteln. Sie verschwinden, sobald $k = 0$ oder $r = \infty$ ist.

Setzt man in den 16) $r_1 = r_2$, so werden die sphärischen Correctionen einander gleich. In diesem Falle kann man sie leicht durch die Gleichung IX) berechnen, wenn die Polhöhen und die geodätischen Azimuthe gegeben sind. Es folgt nämlich aus der IX) mit Rücksicht auf die 15)

17) $$cos\, \pi_1\, sin\, (a_1 + w_1) = cos\, \pi_2\, sin\, (a_2 - w_2).$$

Setzt man hierin $w_1 = w_2 = w$ und entwickelt diese Grösse, so kommt schliesslich

18) $$tg\, w = \frac{cos\, \pi_2\, sin\, a_2 - cos\, \pi_1\, sin\, a_1}{cos\, \pi_2\, cos\, a_2 + cos\, \pi_1\, cos\, a_1}.$$

Die Azimuthe a_1 und a_2, wenn sie in gleichen Höhen r_1 und r_2 genommen sind, sollen kurzweg symmetrische Azimuthe heissen.

Die Berechnung der sphärischen Correctionen ist weniger einfach, wenn r_1 und r_2 von verschiedener Grösse sind. Man hat es dann mit zwei Unbekannten w_1 und w_2 zu thun, deren Ermittelung noch eine zweite Gleich-

ung erfordert. Dieselbe lässt sich entwickeln, wenn die Endpunkte der Längen r_1 und r_2 durch eine Linie s verbunden werden und die Winkel $90-q_1$ und $90-q_2$ bekannt sind, die diese Linie mit den Kanten bildet. Die neu eingeführte Gerade ist ebenfalls eine Axe des Zweiecks; die Winkel q_1 und q_2, die man Höhenwinkel nennen kann, entsprechen den Polhöhen der Axe l. Man kann deshalb die bereits entwickelten Formeln, insofern sie sich auf die Axe beziehen, auch hier zur Anwendung bringen. Die Gleichung 9) geht jetzt in folgende über:

$$\frac{k}{s} = \cos q_1 \cos v' = \cos q_2 \cos v''.$$

Führt man an Stelle der v' und v'' die sphärischen Correctionen ein, so kommt

19) $$\frac{k}{s} = \cos q_1 \sin w_1 = \cos q_2 \sin w_2.$$

Es verhalten sich daher die Sinus der sphärischen Correctionen umgekehrt wie die Cosinus der Höhenwinkel.

Die Gleichung 5) giebt, wenn man sie auf die Axe s bezieht, folgende Relationen:

20) $$\left.\begin{array}{l} s = \sqrt{k^2 + r_1^2 + r_2^2 - 2 \cdot r_1 r_2 \cdot \cos\partial} \\ = \dfrac{k}{\sin\partial}\sqrt{\sin\partial^2 + \operatorname{cotg} w_1^2 + \operatorname{cotg} w_2^2 - 2 \operatorname{cotg} w_1 \operatorname{cotg} w_2 \cos\partial} = \dfrac{k.n}{\sin\partial}, \\ k = \dfrac{s \cdot \sin\partial}{n}. \end{array}\right\}$$

Substituirt man diese Werthe in die 14a), so kommt

21) $$r_1 = \frac{s \cdot \operatorname{cotg} w_2}{n}, \quad r_2 = \frac{s \cdot \operatorname{cotg} w_1}{n}.$$

Macht man die Voraussetzung, es sei $r_1 = r_2$, und setzt ferner

$$\cos\frac{\partial}{2} \cdot \operatorname{tg} w = \operatorname{tg} z,$$

so folgt aus den vorigen Formeln

22) $$k = \frac{s \cdot \cos\dfrac{\partial}{2} \operatorname{tg} w}{\sqrt{1 + \cos\dfrac{\partial^2}{2} \operatorname{tg} w^2}} = s \sin z,$$

23) $$r = \frac{s \cdot \cos z}{2 \cdot \sin\dfrac{\partial}{z}}.$$

Wenn die beiden aus den 19) und 22) resultirenden Werthe für $k:s$ einander gleich gesetzt werden, so erhält man

$$\frac{k}{s} = \cos q \sin w = \frac{\cos\dfrac{\partial}{2} \operatorname{tg} w}{\sqrt{1 + \cos\dfrac{\partial^2}{2} \operatorname{tg} w^2}}.$$

Löst man diese Gleichung nach q auf, so kommt schliesslich

24) $$\cos q = \frac{\cos\frac{\partial}{2}}{\sqrt{1-\sin w^2 \sin\frac{\partial^2}{2}}}.$$

Es soll nun untersucht werden, auf welche Weise sich aus den entwickelten Formeln die Lage und Figur des Linienzweiecks bestimmen lässt. Nimmt man erstens an, es seien folgende Stücke gegeben:

Die beiden Polhöhen, die beiden geodätischen Azimuthe, die Länge und die geradlinige Entfernung s; dann lassen sich aus der XIII) der Winkel ∂ und aus den X) und XI) die sphärischen Azimuthe berechnen. Damit sind nun zugleich die Grössen w_1 und w_2 gegeben, mittels welcher man durch die 20) und 21) die übrigen Stücke bestimmen kann.

Wenn λ unbekannt ist, so lässt sich das sphärische Dreieck nicht ohne Weiteres berechnen. Man ist genöthigt, zuvor die sphärischen Correctionen zu ermitteln, was aber nur durch die 17) mit Hinzuziehung der 19) geschehen kann. Daraus folgt, dass in diesem Falle die Kenntniss der Höhenwinkel erforderlich ist.

Wenn die Polhöhen, die Länge und nur ein Azimuth a_1 gegeben sind, so ist zwar das sphärische Dreieck und mit ihm auch w_1 bekannt. Damit lassen sich jedoch die übrigen Stücke nicht bestimmen, wenn nicht wenigstens auch die Höhe q_1 bekannt ist. Mittels dieser findet man aus den 19) den kürzesten Abstand und dann das Uebrige.

Auf leichtere Weise kann man das Linienzweieck ermitteln, wenn die symmetrischen Azimuthe gegeben sind, weil unter dieser Voraussetzung die Formel 18) für sich allein die sphärische Correction ergiebt. In dem ersten der vorhin erörterten Fälle ist dann die Länge ein überzähliges Stück, und im zweiten Falle macht sich die Kenntniss der Höhenwinkel überflüssig. — Man bedient sich bei Ausführung der numerischen Rechnung mit Vortheil einiger sphärischen Formeln, die hier angeführt werden sollen. Sie lauten:

25) $$tg\frac{\lambda}{2} = \frac{\cos\frac{\pi_2-\pi_1}{2}}{\sin\frac{\pi_2+\pi_1}{2}} cotg\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}, \quad tg\frac{\lambda}{2} = \frac{\sin\frac{\pi_2-\pi_1}{2}}{\cos\frac{\pi_2+\pi_1}{2}} cotg\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}.$$

Aus den 15) lässt sich nun die einfache Relation ableiten:

$$\alpha_1+\alpha_2 = a_1+a_2.$$

Führt man diese ein, so geht die erste der 25) in folgende über:

26 a) $$tg\frac{\lambda}{2} = \frac{\cos.\frac{\pi_2-\pi_1}{2}}{\sin.\frac{\pi_2+\pi_1}{2}} cotg\frac{a_1+a_2}{2}.$$

Dividirt man beide Gleichungen durch einander, so erhält man weiter

26b) $$tg\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2} = tg\frac{\pi_2-\pi_1}{2}\,.\,tg\frac{\pi_2+\pi_1}{2}\,tg\frac{a_1+a_2}{2}.$$

Diese beiden Formeln zeigen, dass man aus den symmetrischen Azimuthen sofort die fehlenden Stücke des sphärischen Dreiecks berechnen kann, ohne dazu der sphärischen Correction zu bedürfen.

Die 26a) und 26b) können übrigens auch dann angewandt werden, wenn die gegebenen Azimuthe keine symmetrischen sind. Setzt man in der 19) $w_2 = w_1 + dw$ und betrachtet dw als eine sehr kleine Grösse, so kommt

$$\cos q_1 \sin w_1 = \cos q_2 \sin w_1 + \cos q_2 \cos w_1\, dw.$$

Durch eine leichte Entwickelung folgt weiter

26c) $$dw = \frac{2.tg\,w_1}{\cos q_2}\sin\frac{q_2-q_1}{2}\sin\frac{q_2+q_1}{2}.$$

Mittels dieser Formel kann man die Grösse dw berechnen, wenn die sphärische Correction bekannt ist. Für die letztere findet man einen genäherten Werth durch die 26b), sobald die gegebenen Azimuthe wie symmetrische behandelt werden. Benutzt man nun diesen Werth zur Berechnung von dw und wandelt dann die Azimuthe in symmetrische um, so geben schliesslich die 26a) und 26b) die Winkel des sphärischen Dreiecks mit der nöthigen Schärfe.

§ 3. Das Linienpaar.

Wenn man an einem Linienzweiecke zwei positive Kantenrichtungen annimmt und dann das Auge in einen Punkt der Pollinie, welcher nicht zwischen den beiden Kanten liegt, versetzt, so muss man den Blick entweder nach rechts oder nach links wenden, um auf kürzestem Wege von der positiven Seite der zunächst liegenden Kante zur positiven Seite der andern Kante zu gelangen. Im ersteren Falle soll das Linienzweieck positiv, im letzteren negativ heissen. Um weitschweifige Erörterungen zu vermeiden, ist es nöthig, dem Linienzweieck und seinen Theilen besondere Namen zu geben, wenn man nur die eben besprochene Eigenschaft hervorheben will. Deshalb möge es in solchen Fällen Linienpaar genannt werden; die Pollinie des Zweiecks möge der Axe des Linienpaares, die Kanten des Zweiecks den Schenkeln des Linienpaares entsprechen.

Nachdem diese Definition vorausgeschickt worden ist, soll nun mit Bezug auf den vorigen Paragraphen untersucht werden, wie das Vorzeichen des auf eine Axe bezogenen Linienzweiecks aus den gegebenen oder berechneten Grössen ermittelt werden kann.

Zuerst kommt es darauf an, auf welcher Seite des Meridians die zweite Kante liegt. Um dies auszudrücken, kann man sich der Dreiecksrichtung bedienen. Bezeichnet man nämlich die sphärischen Dreieckspunkte, den Kanten 1) und 2) entsprechend, mit 1 und 2, ferner den dritten Punkt am Pole mit 3, so wird die Lage der zweiten Kante gegen den Meridian be-

stimmt, wenn man angiebt, ob der Weg 123 von der Linken zur Rechten oder von der Rechten zur Linken geht. Im ersteren Falle soll das Dreieck oder die Dreiecksrichtung positiv, im letzteren Falle negativ heissen.

Zweitens ist die sphärische Correction in Betracht zu ziehen. Man hat nach den 15) die einfache Relation $w_1 = \alpha_1 - a_1$. Diese Gleichung giebt durch das Vorzeichen von w_1 Aufschluss über die Lage der zweiten Kante gegen die sphärische Dreiecksseite 1)2).

Durch eine leichte geometrische Betrachtung lässt sich nun folgendes Criterium ableiten: Sobald die Dreiecksrichtung und die sphärische Correction gleiche Vorzeichen haben, ist das Linienpaar negativ; haben sie ungleiche Vorzeichen, so ist es positiv.

§ 4. Das Liniendreieck.

Man bezeichne die drei Kanten mit 1), 2) und 3) und füge jeder Grösse, die sich auf eine gewisse Kante bezieht, das Zeichen derselben bei, andere Grössen hingegen, welche sich gegen zwei Kanten gleich verhalten oder welche zwei Kanten verknüpfen, markire man durch das Zeichen der dritten Kante. Auf diese Weise entstehen die Poldistanzen d_1, d_2, d_3 und die Dreieckswinkel u', u'', u''' der Kanten 1), 2) und 3), ferner die kürzesten Abstände k_1, k_2 und k_3 und die Seiten ∂_1, ∂_2 und ∂_3 zwischen den Kanten 2) und 3), 3) und 1), 1) und 2).

In § 2 sind zwei Kanten bereits auf ein Coordinatensystem bezogen worden; hier ist nun die dritte Gleichung beizufügen, so dass kommt

$$27) \quad \begin{array}{lll} x_1 = 0, & y_1 = y_1, & z_1 = 0, \\ x_2 = k_3 \, tg\, v, & y_2 = k_3 \, cotg\, \partial_3 \, tg\, v, & z_2 = k_3, \\ x_3 = \dfrac{k_2 \, sin\, v}{cos\,(v - u_1)}, & y_3 = k_2 \, cotg\, \partial_2 \, tg\,(v - u_1) - d_1, & z_3 = \dfrac{k_2 \, cos\, v}{cos\,(v - u_1)}. \end{array}$$

Die dritte Gleichung erhält man leicht, indem man anfänglich zwischen der ersten und dritten Kante ein ähnliches Coordinatensystem voraussetzt, wie das schon behandelte zwischen der ersten und zweiten Kante, und dann dasselbe um den Winkel u_1 dreht und um die Poldistanz d_1 verschiebt.

Das Liniendreieck besteht aus einer beträchtlichen Anzahl einzelner Theile, welche auf die verschiedenartigste Weise mit einander verknüpft sein können. Wenn nun für dasselbe allgemein giltige und übersichtliche Gleichungen entwickelt werden sollen, so kommt es darauf an, durch Anwendung geeigneter Bezeichnungen all die verschiedenen Fälle auf eine möglichst einfache Weise auszudrücken. Dies geschieht mittels der Linienpaare. An einem Dreiecke hat man sechs solcher Figuren, von denen drei eine Pollinie zur Axe und zwei Kanten zu Schenkeln und die drei übrigen eine Kante zur Axe und zwei Pollinien zu Schenkeln haben. Das Vorzeichen der erstgenannten Paare wird nach § 3 durch die positiven Richtungen

der Kanten, das der übrigen Paare durch die positiven Richtungen der Pollinien bestimmt. Das Vorzeichen der Pollinie hängt von den angrenzenden Linienpaaren ab und es gilt die Regel: Sobald das Linienpaar, dem die Pollinie als Axe angehört, positiv ist, wird die positive Richtung dieser Linie von der nächsten Kante aus zur zweiten hingenommen; ist dagegen jenes Linienpaar negativ, so trifft die positive Richtung der Pollinie die zweite Kante nicht. Daraus folgt, dass ein und dieselbe Pollinie an beiden Enden zwei entgegengesetzt positive Richtungen hat, was bei Ermittelung der Linienpaare zu beachten ist.

Es kommt nun darauf an, den geometrischen Eigenschaften, welche durch das positive oder negative Vorzeichen der Linienpaare repräsentirt werden, auch in den analytischen Formeln Ausdruck zu geben. Dies geschieht auf einfache Weise, indem man den Axen, also den Grössen k und d, gleiches Vorzeichen mit dem zugehörigen Linienpaare ertheilt. Durch Einführung dieser Bezeichnung ist man der Mühe überhoben, bei Ermittelung der Winkel der Liniendreiecke noch besondere Rücksicht auf die verschiedenen Fälle zu nehmen; es bleibt in dieser Beziehung nichts Anderes zu thun, als die positiven Kantenrichtungen zu einer körperlichen Ecke zu vereinigen und diese nach bekannter Methode sphärisch zu berechnen.

Was nun schliesslich das Coordinatensystem betrifft, auf welches das Liniendreieck behufs Ermittelung der verschiedenen Formeln bezogen wird, so ist Folgendes zu beachten:

Die Y-Axe fällt, wie schon gesagt, mit der positiven Richtung der ersten Kante zusammen. Von dieser Kante gehen zwei Pollinien aus, deren positive Richtungen einen Winkel bilden, welcher kleiner als 180^0 ist. Denjenigen Schenkel dieses Winkels, welcher zur Linken liegt, wählt man zur z-Axe und bezeichnet die betreffende Kante mit 2), die dem andern Schenkel zugehörige Kante mit 3). Dadurch erzielt man neben der positiven, d. h. von der Linken zur Rechten laufenden Axenrichtung xyz auch die positive Dreiecksrichtung 123.

Unter Beobachtung dieser Regeln sind die folgenden Formeln allgemein giltig.

Differentiirt man die Gleichungen 27), so erhält man die Cosinus der Richtungswinkel der Kante, nämlich

$$28) \quad \begin{array}{lll} x'_1 = 0, & y'_1 = 1, & z'_1 = 0, \\ x'_2 = \sin\partial_3, & y'_2 = \cos\partial_3, & z'_2 = 0, \\ x'_3 = \cos u_1 \sin\partial_2, & y'_3 = \cos\partial_2, & z'_3 = -\sin u_1 \sin\partial_2. \end{array}$$

Diese Winkel sind unabhängig von den linearen Grössen des Liniendreiecks, sie gehören daher einem sphärischen Dreieck, und zwar dem sphärischen Kantendreieck an. Entwickelt man die Seiten dieses Dreiecks, so folgt

$$\cos\vartheta_1 = \cos\vartheta_2 \cos\vartheta_3 + \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \cos u_1,$$

und analog

29)
$$\cos\vartheta_2 = \cos\vartheta_3 \cos\vartheta_1 + \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_1 \cos u_2,$$
$$\cos\vartheta_3 = \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos u_3.$$

In diesen Gleichungen bedeuten die u_1, u_2 und u_3 die Winkel des Kantendreiecks; sie stimmen mit den Winkeln u', u'', u''' des Liniendreiecks überein, sobald die beiden zusammenstossenden, den Axen k angehörigen Linienpaare gleiche Vorzeichen haben; im entgegengesetzten Falle ergänzen sie sich zu 180°.

Wir schreiten nun zur Entwickelung der Relationen, welche zwischen den Grössen k und d stattfinden. Setzt man in den 27) $v=0$, so erhält man zwei bestimmte Punkte der beiden Kanten 2) und 3). Projicirt man dieselben auf die Pollinie, so resultirt eine Gleichung für den kürzesten Abstand k_1.

Aus den 27) hat man erstens

$$x_2 = 0, \quad y_2 = 0, \qquad z_2 = k_3,$$
$$x_3 = 0, \quad y_3 = -(k_2 \operatorname{cotg}\vartheta_2 \operatorname{tg} u_1 + d_1), \quad z_3 = \frac{k_2}{\cos u_1}.$$

Führt man nun die Projection aus und benutzt dazu die aus den 28) in leichter Weise abzuleitenden Richtungsgrössen der Pollinie k_1, nämlich

30) $\cos a_1 = -\sin u_2 \cos\vartheta_3, \quad \cos b_1 = \sin u_2 \sin\vartheta_3, \quad \cos c_1 = \cos u_2,$

so folgt

$$k_1 = (d_1 + k_2 \operatorname{cotg}\vartheta_2 \operatorname{tg} u_1) \cos b_1 - \frac{k_2 - k_3 \cos u_1}{\cos u_1} \cdot \cos u_2.$$

Dieser Ausdruck lässt sich vereinfachen. Bringt man denselben zuerst auf die Form

$$k_1 = d_1 \cos b_1 + k_3 \cos u_2 + k_2 \left(\frac{\operatorname{cotg}\vartheta_2 \operatorname{tg} u_1 \sin u_2 \sin u_3 \sin\vartheta_3}{\sin u_3} - \frac{\cos u_2}{\cos u_1} \right)$$

und setzt dann im letzten Gliede nach einer bekannten Formel der sphärischen Trigonometrie für $\sin u_1 \sin u_3 \cos\vartheta_2$ den Ausdruck $\cos u_2 + \cos u_1 \cos u_3$, so findet man nach kurzer Entwickelung, dass die Grösse unter der Klammer $= \cos u_3$ ist. Es folgt daher die Gleichung

$$k_1 = d_1 \cos b_1 + k_2 \cos u_3 + k_3 \cos u_2.$$

Aehnliche Ausdrücke erhält man für k_2 und k_3; stellt man sie alle zusammen, so kommt

31)
$$k_1 = d_1 \cos b_1 + k_2 \cos u_3 + k_3 \cos u_2,$$
$$k_2 = d_2 \cos b_2 + k_3 \cos u_1 + k_1 \cos u_3,$$
$$k_3 = d_3 \cos b_3 + k_1 \cos u_2 + k_2 \cos u_1.$$

Diese Formeln stellen die Grössen d als Functionen der k dar. Sie mögen nun in der Weise umgekehrt werden, dass die k als Functionen der d erscheinen. Schreibt man sie in der Form

$$
\begin{aligned}
d_1 \cos b_1 &= k_1 - k_2 \cos u_3 - k_3 \cos u_2 ,\\
d_2 \cos b_2 &= -k_1 \cos u_3 + k_2 - k_3 \cos u_1 ,\\
d_3 \cos b_3 &= -k_1 \cos u_2 - k_2 \cos u_1 + k_3
\end{aligned}
\qquad 32)
$$

und entwickelt die k nach Determinanten, so kommt

$$k_1 = \frac{d_1 \cos b_1 \sin u_1^2 + d_2 \cos b_2 (\cos u_2 \cos u_1 + \cos u_3) + d_3 \cos b_3 (\cos u_3 \cos u_1 + \cos u_2)}{1 - \cos u_1^2 - \cos u_2^2 - \cos u_3^2 - 2 . \cos u_1 \cos u_2 \cos u_3} .$$

Zur Vereinfachung der Ausdrücke wendet man die bekannten Gleichungen an:

$$
\begin{aligned}
\cos u_3 + \cos u_2 \cos u_1 &= \sin u_1 \sin u_2 \cos \partial_3 ,\\
\cos u_2 + \cos u_1 \cos u_3 &= \sin u_1 \sin u_3 \cos \partial_2 ,\\
\cos u_1 + \cos u_2 \cos u_3 &= \sin u_2 \sin u_3 \cos \partial_1 .
\end{aligned}
$$

Multiplicirt man diese Gleichungen beziehungsweise mit $\cos b_2$ und $\cos b_3$ und setzt

$$\cos b_1 \sin u_1 = \cos b_2 \sin u_2 = \cos b_3 \sin u_3 = n ,$$

so gehen die Ausdrücke im Zähler in folgende über:

$$
\begin{aligned}
\cos b_1 \sin u_1^2 &= n . \sin u_1 ,\\
\cos b_2 (\cos u_2 \cos u_1 + \cos u_3) &= n . \sin u_1 \cos \partial_3 ,\\
\cos b_3 (\cos u_3 \cos u_1 + \cos u_2) &= n . \sin u_1 \cos \partial_2 .
\end{aligned}
$$

Zur Abkürzung des Nenners wendet man dieselben Gleichungen an und erhält nach kurzer Entwickelung für denselben den Ausdruck:

$$\text{Nenner} = \cos b_1 \sin u_1 . n .$$

Führt man diese Abkürzungen im Zähler und Nenner ein und setzt dann die analogen Formeln bald hinzu, so kommt schliesslich

$$
\begin{aligned}
k_1 \cos b_1 &= d_1 + d_2 \cos \partial_3 + d_3 \cos \partial_2 ,\\
k_2 \cos b_2 &= d_2 + d_3 \cos \partial_1 + d_1 \cos \partial_3 ,\\
k_3 \cos b_3 &= d_3 + d_1 \cos \partial_2 + d_2 \cos \partial_1 .
\end{aligned}
\qquad 33)
$$

Formt man diese Gleichungen in die folgenden um:

$$
\begin{aligned}
k_1 \cos b_1 &= d_1 - d_2 \cos (180 - \partial_3) - d_3 \cos (180 - \partial_2) ,\\
k_2 \cos b_2 &= d_2 - d_3 \cos (180 - \partial_1) - d_1 \cos (180 - \partial_3) ,\\
k_3 \cos b_3 &= d_3 - d_1 \cos (180 - \partial_2) - d_2 \cos (180 - \partial_1) ,
\end{aligned}
\qquad 34)
$$

und vergleicht sie mit den 32), so ist die Uebereinstimmung derselben nach Vertauschung der Grössen k und d ersichtlich. Dieselbe kann nicht überraschen, wenn man beachtet, dass die Winkel $180 - \partial_1$, $180 - \partial_2$, $180 - \partial_3$ dem Polardreieck angehören. Die Pollinien bilden nämlich das Polardreieck zu dem sphärischen Kantendreieck mit den Seiten ∂_1, ∂_2 und ∂_3. Nimmt man also jetzt diese Linien als Kanten des Liniendreiecks an, so müssen natürlich Gleichungen hervorgehen, welche den früheren ganz analog sind und nur dadurch einen Unterschied zeigen, dass k und d ihre Bedeutung gewechselt haben.

§ 5. Die Axen des Liniendreiecks.

Legt man durch eine Kante des Linienzweiecks eine Ebene, so trifft dieselbe, wenn man von den Grenzfällen abstrahirt, in jeder Lage die zweite Kante, und da sich der Schnittpunkt an dieser Kante mit allen Punkten der ersten verbinden lässt, so sind bei jeder solchen Lage noch unendlich viel Axen möglich. Daraus folgt, dass sich im Allgemeinen von jedem Punkte im Raume und in jeder Richtung eine Axe an das Linienzweieck legen lässt.

Beim Dreieck reducirt sich die Anzahl der Axen auf eine unendliche Anzahl niederer Ordnung. Auch hier schneidet die gedachte Ebene bei jeder Lage die übrigen Kanten; es entstehen aber zwei Schnittpunkte, die nur durch eine einzige Axe verbunden werden können. Man kann daher sagen: Durch jeden Kantenpunkt des Liniendreiecks lässt sich eine Axe, aber nur eine einzige legen.

Wenn die Aufgabe gestellt ist, die drei Kanten eines gegebenen Liniendreiecks durch eine gegebene Richtung zu verbinden, so verschiebt man die Letztere parallel an einen beliebigen Puukt einer beliebigen Kante. Die durch beide Linien bestimmte Ebene schneidet die übrigen Kanten in zwei Punkten und legt demnach eine gewisse Axe fest. Findet man nun, dass diese Axe parallel zur gegebenen Richtung ist, so hat die Aufgabe einen Sinn und ist überhaupt schon gelöst; im andern Falle hingegen würde die gegebene Richtung keine Axe des Dreiecks bilden können.

Man kann aber den Begriff der Axe weiter ausdehnen. Es ist nämlich immer möglich, eine Linie von bestimmter Richtung an je zwei Kanten zu legen. Da nun das Dreieck aus drei Zweiecken besteht, so würde man auf diese Weise drei parallele Partialaxen construiren können. Auch diese sind zur Ermittelung der Linienvielecke geeignet, wie sich später zeigen wird.

Einige specielle Eigenschaften der Axen sollen auf analytischem Wege entwickelt werden. Man kann zu diesem Zwecke die drei Axen des Coordinatensystems auf zwei reduciren, weil es nur nöthig ist, die Ebene zu betrachten, in welcher die Axe liegt. Die Ordinate y bleibt dieselbe, die Abscisse ξ hingegen erhält man durch die Gleichung

$$\xi^2 = x^2 + z^2.$$

Es folgt daher aus den 27)

$$\xi_2 = \frac{k_3}{\cos v}, \quad y_2 = k_3 \operatorname{cotg} \partial_3 \operatorname{tg} v; \quad \xi_3 = \frac{k_2}{\cos (v - u_1)}, \quad y_3 = k_2 \operatorname{cotg} \partial_2 \operatorname{tg} (v - u_1) - d_1.$$

Die Tangente des Winkels zwischen der Axe und der neuen Abscissenlinie ist allgemein gegeben durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} i = \frac{y_3 - y_2}{\xi_3 - \xi_2}.$$

Führt man für ξ und y die obigen speciellen Werthe ein, so kommt

$$tg\,i = \frac{k_2\,cotg\,\partial_2\,cos\,v\,sin(v-u_1) - k_3\,cotg\,\partial_3\,sin\,v\,cos(v-u_1) - d_1\,cos\,v\,cos(v-u_1)}{k_2\,cos\,v - k_3\,cos(v-u_1)}. \quad 35)$$

Diese Gleichung giebt Aufschluss über die verschiedenen Lagen der Axe. Setzt man z. B. den Nenner $=0$, so wird $tg\,i=\infty$. In diesem Falle ist also die Axe des Dreiecks parallel zur ersten Kante. Für den Winkel v, welcher dieser Lage entspricht, erhält man ohne Schwierigkeit den Ausdruck

$$tg\,v = \frac{k_2 - k_3\,cos\,u_1}{k_3\,sin\,u_1} = tg\,\mu_1. \quad 36)$$

Auch die beiden anderen Grenzfälle, wo die Axe parallel zur zweiten, resp. zur dritten Kante ist, lassen sich leicht ermitteln. Der erstere Fall findet statt, wenn $v=\mu_2=90^0$, der letztere, wenn $v=\mu_3=u_1+90^0$ ist. Man überzeugt sich von der Richtigkeit dieser Angabe sofort, wenn man die gedachten Werthe in die 35) substituirt; es folgen dann die Gleichungen

$$tg\,i = cotg\,\partial_3 \text{ und } tg\,i = cotg\,\partial_2.$$

welche der Voraussetzung genügen.

In den drei Winkelräumen $\mu_2-\mu_1$, $\mu_3-\mu_2$ und $\mu_1-\mu_3$ wechseln die Kanten des Dreiecks ihre Lage gegen die Axe. Wenn nämlich drei Linien eine vierte in drei verschiedenen Punkten schneiden, so muss einer dieser Punkte der mittlere und eine dieser Linien die mittlere sein. Eine einfache geometrische Betrachtung ergiebt nun in Bezug auf die Lage der drei Kanten Folgendes:

In dem Winkelraume $\mu_2-\mu_1$ ist die Kante 3),
„ „ „ $\mu_3-\mu$ „ „ „ 1),
„ „ „ $\mu_3-\mu_1$ „ „ „ 2)

die mittlere. Es ist daher leicht, aus der Grösse des Winkels v auf die Lage der Axe zu schliessen.

§ 6. Die Berechnung des Liniendreiecks.

Ein Liniendreieck ist bestimmt, sobald wenigstens zwei Zweiecke desselben gegeben sind. Unter dieser Voraussetzung hat man zur Berechnung des sphärischen Kantendreiecks zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel; zur Berechnung der linearen Grössen können die sämmtlichen Stücke der gegebenen Zweiecke verwandt werden. Unter diesen Stücken befinden sich die Grössen h_{12} und h_{13}, welche sich auf die Kante 1) beziehen und deren Summe oder Differenz die Poldistanz d_1 giebt. Ferner hat man die Axenlängen l_2 und l_3, mittels welcher man die dritte Axe l_1 entweder durch Addition oder Subtraction, je nachdem die Kante 1) die mittlere ist oder nicht, ableiten kann. Aus der l_1 lässt sich dann nach der IX) die k_1 berechnen, und die Gleichungen 31) und 33) geben schliesslich das Uebrige.

Sobald das Liniendreieck nicht auf eine einzige, sondern auf drei parallele Partialaxen bezogen worden ist, kann das eben erörterte Verfahren nicht zur Anwendung kommen. Das sphärische Kantendreieck bleibt zwar dasselbe, die Winkelgleichungen werden daher nicht modificirt, wohl aber tritt in den Relationen der linearen Grössen eine Aenderung ein. Da sich nämlich die Grössen h_{12}, h_{12}, l_2 und l_3 auf verschiedene Axen beziehen, so bestehen die einfachen Gleichungen

$$h_{12} \pm h_{13} = \pm d_1 \quad \text{und} \quad l_2 \pm l_3 = l_1,$$

deren man sich vorhin bediente, nicht mehr. In solchen Fällen ist es nöthig, dass alle drei Linienzweiecke gegeben sind. Man kennt dann auch die drei kürzesten Abstände k_1 etc. und ist im Stande, durch die Gleichungen 31) und 33) die übrigen Grössen zu berechnen.

In § 2 wurde zur Ermittelung des Zweiecks die Kenntniss der Länge s gefordert. Beim Liniendreieck ist es nicht nöthig, dass alle drei Entfernungen s_1, s_2 und s_3 gegeben sind. Diese Linien bilden nämlich, im Falle sie sich schneiden, ein ebenes Dreieck, dessen Winkel sich auf einfache Weise aus den gegebenen geodätischen Azimuthen und den Höhenwinkeln ableiten lassen. Es reicht daher aus, wenn eine der drei Seiten bekannt ist, weil man die übrigen dann leicht berechnen kann.

Was die Winkel A_1, A_2 und A_3 des ebenen Dreiecks betrifft, so ist noch Folgendes zu bemerken: Die Linien s_2 und s_3 bilden mit der Kante 1) eine körperliche Ecke, deren Seiten durch die Winkel $90-q_2$ und $90-q_3$ und deren eingeschlossener Winkel durch die Differenz a_3-a_2 der geodätischen Azimuthe gegeben sind. Die gegenüberliegende Seite ist identisch mit dem gesuchten Dreieckswinkel A_1. Man hat daher nach der sphärischen Trigonometrie die Gleichung

37) $$\cos A_1 = \sin q_2 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \cos(a_3 - a_2).$$

Die anderen Winkel A_2 und A_3 werden auf ähnliche Weise bestimmt.

§ 7. Das geschlossene Liniendreieck.

Ein Dreieck heisst ein geschlossenes, sobald die Gleichung stattfindet

$$d_1 + d_2 + d_3 = 0.$$

Verbindet man die Kanten eines solchen Dreiecks durch zwei sich schneidende, symmetrische, d. h. zu beiden Kanten gleich liegende, Sehnen und legt durch die Endpunkte derselben eine dritte Sehne, so hat auch diese eine symmetrische Lage gegen die betreffenden Kanten. Die Winkel, welche diese Linien mit dem Meridiane bilden, sind also durchweg symmetrische Azimuthe.

Nimmt man in den 33) die Winkel ∂_1, ∂_2^* und ∂_3 sehr klein an, so folgt die Gleichung

$$d_1 + d_2 + d_3 = \varepsilon,$$

worin ε von der Ordnung $(k\partial)$ ist. Legt man nun durch die Kanten eines solchen Dreiecks symmetrische Sehnen, so bilden dieselben im Allgemeinen zwar keine vollständig geschlossene Figur; die Differenz ist aber in Bezug auf die Länge der Seiten so gering, dass man die Figur wie ein geschlossenes ebenes Dreieck und auch die Azimuthe wie symmetrische behandeln darf. Diese Eigenschaften der kleinen Liniendreiecke gestatten manche Abkürzungen in der Berechnung.

Es soll nun hauptsächlich das besprochene Sehnendreieck noch einer näheren Betrachtung unterworfen werden. Setzt man in der 37) für $a_3 - a_2$ das Zeichen p_1, so kommt

$$\cos A_1 = \sin q_2 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \cos p_1.$$

Vernachlässigt man die vierten Potenzen von q und entwickelt die Gleichung weiter, so folgt

$$\cos A_1 = q_2 q_3 + \cos p_1 - \cos p_1 \frac{(q_2^2 + q_3^2)}{2}$$

oder

$$\cos A_1 - \cos p_1 = 2 \sin \frac{(p_1 - A_1)}{2} \sin \frac{(p_1 + A_1)}{2} = q_2 q_3 - \cos p_1 \frac{(q_2^2 + q_3^2)}{2},$$

schliesslich

$$38\,a) \qquad p_1 - A_1 = \frac{q_2 q_3 - \cos p_1 \frac{(q_2^2 + q_3^2)}{2}}{\sin \frac{(p_1 + A_1)}{2}}.$$

Dafür kann man auch annähernd schreiben

$$38\,b) \quad p_1 - A_1 = \frac{q_2 q_3 - \cos p_1 \frac{(q_2^2 + q_3^2)}{2}}{\sin p_1} = \frac{q_2 q_3 - \frac{\cos A_1 (q_2^2 + q_3^2)}{2}}{\sin A_1}.$$

Man denkt sich nun die Ecken des Dreiecks durch Kreisbögen verbunden, deren Radien durch die Gleichungen

$$q_1 = \frac{s_1}{2\varrho_1}, \quad q_2 = \frac{s_2}{2\varrho_2}, \quad q_3 = \frac{s_3}{2\varrho_3}$$

gegeben sind, und führt gleichzeitig einen mittleren Radius r mittels der Relationen

$$\varrho_1 = r + dr_1, \quad \varrho_2 = r + dr_2, \quad \varrho_3 = r + dr_3,$$

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{r} - \frac{dr_1}{r^2} \text{ etc.}, \quad \frac{1}{\varrho_1^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2.dr_1}{r^3} \text{ etc.}, \quad \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{dr_1}{r} - \frac{dr_2}{r}\right) \text{ etc.}$$

ein. Durch die Substitution dieser Ausdrücke geht die 38b) in folgende über:

$$p_1 - A_1 = \frac{s_2 s_3}{4r^2} - \frac{s_2 s_3}{4r^3}(dr_2 + dr_3) - \frac{\cos A_1}{8r^2}(s_2^2 + s_3^2) + \frac{\cos A_1}{4r^3}(s_2^2 dr_2 + s_3^2 dr_3).$$

Bringt man die Glieder gleicher Ordnung zusammen und fügt die analogen Gleichungen hinzu, so kommt

$$p_1 - A_1 = \left[\frac{s_2 s_3}{4r^2} - \frac{\cos A_1}{8r^2}(s_2^2 + s_3^2) + \frac{\cos A_1}{4r^3}(s_2^2\, dr_2 + s_3^2\, dr_3) - \frac{s_2 s_3}{4r^3}(dr_2 + dr_3)\right] : \sin A_1,$$

$$p_2 - A_2 = \left[\frac{s_1 s_3}{4r^2} - \frac{\cos A_2}{8r^2}(s_1^2 + s_3^2) + \frac{\cos A_2}{4r^3}(s_1^2 dr_1 + s_3^2 dr_3) - \frac{s_1 s_3}{4r^2}(dr_1 + dr_3)\right] : \sin A_2, \quad 39)$$

$$p_3 - A_3 = \left[\frac{s_1 s_2}{4r^2} - \frac{\cos A_3}{8r^2}(s_1^2 + s_2^2) + \frac{\cos A_3}{4r^3}(s_1^2 dr_1 + s_2^2 dr_2) - \frac{s_1 s_2}{4r^3}(dr_1 + dr_2)\right] : \sin A_3.$$

Vorstehende Gleichungen sind bis auf Grössen von der Ordnung $(q)^4$ richtig. Dieser Genauigkeitsgrad wird nicht verletzt, sobald man Sehne und Bogen mit einander vertauscht und auf die Grössen s und A die Sätze der ebenen Trigonometrie anwendet. Es sind folgende Gleichungen, welche zur Vereinfachung der obigen Formeln benutzt werden:

$$\frac{s_1}{\sin A_1} = \frac{s_2}{\sin A_2} = \frac{s_3}{\sin A_3}, \quad s_1^2 + s_2^2 = s_3^2 + 2 s_1 s_2 \cos A_3,$$

$$s_1^2 + s_3^2 = s_2^2 + 2 s_1 s_2 \cos A_2 \text{ etc.}$$

Nimmt man nun zuerst die Glieder mit dem Factor $1 : r^2$ vor, so erhält man folgende Ausdrücke:

$$p_1 - A_1 = \frac{1}{4r^2}\left(s_2 s_3 \sin A_1 - \frac{s_1^2}{2}\cot g\, A_1\right) + \ldots,$$

$$p_2 - A_2 = \frac{1}{4r^2}\left(s_1 s_3 \sin A_2 - \frac{s_2^2}{2}\cot g\, A_2\right) + \ldots,$$

$$p_3 - A_3 = \frac{1}{4r^2}\left(s_1 s_2 \sin A_3 - \frac{s_3^2}{2}\cot g\, A_3\right) + \ldots.$$

Addirt man diese Gleichungen und bezeichnet den Flächeninhalt des Dreiecks mit Δ, so folgt ferner

$$p_1 + p_2 + p_3 - \pi = \frac{1}{4r^2}\left[6\Delta - \left(\frac{s_1^2}{2}\cot g\, A_1 + \frac{s_2^2}{2}\cot g\, A_2 + \frac{s_3^2}{2}\cot g\, A_3\right)\right] + \ldots.$$

Der Ausdruck unter der Klammer geht nach einer leicht zu erkennenden Substitution in folgenden über:

$$(x) = \frac{s_1 s_2}{2}\left(\frac{\cot g A_1 \sin A_1}{\sin A_2} + \frac{\cot g A_2 \sin A_2}{\sin A_1} + \frac{\cot g A_3 \sin A_3^2}{\sin A_1 \sin A_2}\right)$$

$$= \frac{s_1 s_2}{2}\left(\frac{\cos A_1}{\sin A_2} + \frac{\cos A_2}{\sin A_1} + \frac{\cos A_3 \sin A_3}{\sin A_1 \sin A_2}\right)$$

$$= \frac{s_1 s_2 (\sin 2A_1 + \sin 2A_2 + \sin 2A_3)}{2 . \sin A_1 \sin A_2}$$

$$= \frac{s_1 s_2}{2}\left(\frac{\sin 2A_1 \sin A_2^2 + \sin 2A_2 \sin A_1^2}{4 \sin A_1 \sin A_2}\right) = s_1 s_2 \sin(A_1 + A_2) = 2.\Delta.$$

Setzt man diesen Werth ein, so kommt

$$p_1 + p_2 + p_3 - \pi = \frac{\Delta}{r^2} + \ldots.$$

Nunmehr sollen die übrigen Glieder der 39) vorgenommen werden. Ordnet man dieselben nach dr, so folgt für $p_1 - A_1$ der Ausdruck

$$\frac{dr_2}{4r^3}\left(\frac{s_2^2 \cos A_1 - s_2 s_3}{\sin A_1}\right) + \frac{dr_3}{4r^3}\left(\frac{s_3^2 \cos A_1 - s_2 s_3}{\sin A_1}\right).$$

Man kann nun folgende Umformungen vornehmen:

$$\frac{s_2^2 \cos A_1 - s_2 s_3}{\sin A_1} = s_2^2 \frac{(\cos A_1 \sin A_2 - \sin A_3)}{\sin A_1 \sin A_2} = -\frac{s_2^2 \sin A_1 \cos A_2}{\sin A_1 \sin A_2} = -s_2^2 \operatorname{cotg} A_2.$$

In ähnlicher Weise erhält man für den analogen Ausdruck im zweiten Gliede

$$\frac{s_3^2 \cos A_1 - s_2 s_3}{\sin A_1} = -s_3^2 \operatorname{cotg} A_3.$$

Führt man diese Abkürzungen für alle derartigen Glieder aus und stellt die Ausdrücke zusammen, so kommt

$$p_1 - A_1 = (\,) - \frac{s_2^2 dr_2 \operatorname{cotg} A_2}{4r^3} - \frac{s_3^2 dr_3 \operatorname{cotg} A_3}{4r^3},$$

$$p_2 - A_2 = (\,) - \frac{s_1^2 dr_1 \operatorname{cotg} A_1}{4r^3} - \frac{s_3^2 dr_3 \operatorname{cotg} A_3}{4r^3},$$

$$p_3 - A_3 = (\,) - \frac{s_1^2 dr_1 \operatorname{cotg} A_1}{4r^3} - \frac{s_2^2 dr_2 \operatorname{cotg} A_2}{4r^3}.$$

Addirt man diese Gleichungen und fügt den oben entwickelten Werth der ersten Glieder ein, so erhält man schliesslich folgendes Resultat:

40) $$p_1 + p_2 + p_3 - \pi = \frac{\Delta}{r^2} - \frac{1}{2.r^3}(s_1^2 \operatorname{cotg} A_1\, dr_1 + s_2^2 \operatorname{cotg} A_2\, dr_2 + s_3^2 \operatorname{cotg} A_3\, dr_3).$$

Dies ist der Ueberschuss der Summe der Dreieckswinkel über 180^0.

Sobald die Radien ϱ_1, ϱ_2 und ϱ_3 einander gleich sind, fallen die Grössen dr_1, dr_2 und dr_3 hinweg und der Ausdruck rechts stellt den sphärischen Excess vor. Zu demselben Ausdruck gelangt man auch, wenn das Glied unter der Klammer $=0$ gesetzt wird. Die Gleichung

41) $$s_1^2 \operatorname{cotg} A_1\, dr_1 + s_2^2 \operatorname{cotg} A_2\, dr_2 + s_3^2 \operatorname{cotg} A_3\, dr_3 = 0$$

giebt also den Werth eines mittleren Radius r_0, welcher mit dem Sehnendreieck ein sphärisches Dreieck bildet, dessen Excess gleich ist dem Winkelüberschuss $p_1 + p_2 + p_3 - \pi$. Die Grösse r_0 lässt sich leicht entwickeln, wenn man für dr die Ausdrücke $\varrho - r$ substituirt. Es kommt

42) $$r_0 = \frac{\varrho_1 s_1^2 \operatorname{cotg} A_1 + \varrho_2 s_2^2 \operatorname{cotg} A_2 + \varrho_3 s_3^2 \operatorname{cotg} A_3}{s_1^2 \operatorname{cotg} A_1 + s_2^2 \operatorname{cotg} A_2 + s_3^2 \operatorname{cotg} A_3}$$
$$= \frac{\varrho_1 s_1^2 \operatorname{cotg} A_1 + \varrho_2 s_2^2 \operatorname{cotg} A_2 + \varrho_3 s_3^2 \operatorname{cotg} A_3}{4.\Delta}.$$

Diese Gleichung nimmt eine sehr einfache Gestalt an, sobald man es nur mit einem rechtwinkligen Dreiecke zu thun hat. Setzt man einen der Winkel A, etwa A_3, $=90^0$, so folgt

$$r_0 = \frac{\varrho_1 s_1^2}{4.\Delta} \frac{\sin A_2}{\sin A_1} + \frac{\varrho_2 s_2^2}{4.\Delta} \frac{\sin A_1}{\sin A_2} = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{4.\Delta} \cdot s_1 s_2$$

oder

$$43) \qquad r_0 = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}.$$

Beim rechtwinkligen Dreieck ist also der mittlere Radius r_0 gleich dem arithmetischen Mittel der Radien, welche den beiden Catheten entsprechen. Construirt man das sphärische Dreieck, welches dem Krümmungsradius r_0 entspricht, und vergleicht die Winkel desselben mit den Winkeln p_1, p_2 und p_3, so kommt man dabei auf kleine Unterschiede, die jetzt ermittelt werden sollen. In den Gleichungen 39) hat man Glieder mit dem Nenner r und solche mit dem Nenner r^3. Die letzteren verschwinden, sobald das Dreieck ein sphärisches ist; sie repräsentiren daher die gesuchten Winkelunterschiede. Da die betreffenden Ausdrücke bereits in den vorigen Entwickelungen besonders behandelt worden sind und dort ihre einfachste Gestalt erhalten haben, so kann man sie jetzt in dieser Form unmittelbar anwenden. Bezeichnet man die sphärischen Dreieckswinkel mit z, so erhält man daher folgende Gleichungen:

$$z_1 - p_1 = \frac{s_2^2\, dr_2\, cotg\, A_2}{4r^3} + \frac{s_3^2\, dr_3\, cotg\, A_3}{4r^3}, \quad z_2 - p_2 = \ldots \text{ etc.}$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit der 41), so vereinfachen sie sich sofort in folgender Weise:

$$44) \qquad \begin{aligned} z_1 - p_1 &= \frac{(r_0 - \varrho_1)\, s_1^2\, cotg\, A_1}{4 r_0^3}, \\ z_2 - p_2 &= \frac{(r_0 - \varrho_2)\, s_2^2\, cotg\, A_2}{4 r_0^3}, \\ z_3 - p_3 &= \frac{(r_0 - \varrho_3)\, s_3^2\, cotg\, A_3}{4 r_0^3}. \end{aligned}$$

Dies sind die gesuchten Winkeldifferenzen. Sie können wegen ihres geringen Betrages bei kleinen Dreiecken ohne Bedenken vernachlässigt werden. Daraus geht eine zweite Methode zur Berechnung der Linien s_1, s_2 und s_3 hervor, eine Methode, durch welche die Reduction der Winkel auf das Sehnendreieck vermieden wird. Man setzt nämlich einen der Bogen σ_1, σ_2 oder σ_3 als bekannt voraus und berechnet die übrigen mittels der Winkel p_1, p_2 und p_3 nach bekannten Sätzen der sphärischen Trigonometrie. Macht sich dann die Kenntniss der Sehnen nöthig, so kann man leicht durch die Formel

$$45) \qquad s = \sigma - \frac{\sigma^3}{24 r_0^2}$$

zu denselben übergehen, wobei nur ein genäherter Werth von r_0 erforderlich ist.

Zum Schlusse soll noch einer wichtigen Eigenschaft des geschlossenen Liniendreiecks gedacht werden. Addirt man nämlich die Winkel p des geodätischen und die Winkel u des sphärischen Kantendreiecks, so erhält man folgende Summen:

$$\begin{array}{rr} p_1 = 180 - a_{12} - a_{13} & u_1 = 180 - \alpha_{12} - \alpha_{13} \\ p_2 = \quad a_{23} - a_{21} & u_2 = \quad \alpha_{23} - \alpha_{32} \\ p_3 = \quad a_{32} - a_{31} & u_3 = \quad \alpha_{32} - \alpha_{31} \end{array}$$

$$Sp = 180 + a_{23} + a_{32} - a_{12} - a_{21} - a_{13} - a_{31}. \quad Su = 180 + \alpha_{23} + \alpha_{32} - \alpha_{12} - \alpha_{21} - \alpha_{13} - \alpha_{31}.$$

Nach den 15) hat man aber allgemein

$$a_{xy} + a_{yx} = \alpha_{xy} + \alpha_{yx}.$$

Wendet man diese Relation auf die obigen Summen an, so folgt

$$Sp = Su.$$

Im geschlossenen Dreieck ist also die Summe der aus der Differenz der Azimuthe hervorgegangenen Winkel p_1, p_2 und p_3 gleich der Winkelsumme des sphärischen Kantendreiecks.

§ 8. Das Linienviereck.

Zwei an einander grenzende Liniendreiecke bilden ein Viereck. Daher ist das letztere vollkommen bestimmt, sobald die zwei ersteren gegeben sind. Als einzige Unbekannte tritt die Diagonale des Vierecks auf. Die Ermittelung derselben bedarf jedoch weiter keiner eingehenden Erörterung, da sie fast identisch ist mit der in § 5 behandelten Aufgabe, die dritte Seite eines Dreiecks aus zwei Zweiecken und dem eingeschlossenen Winkel zu finden. Sie unterscheidet sich nur insofern von dem in § 5 behandelten Falle, als die Poldistanz, welche der der Diagonale gegenüberliegenden Kante zugehört, nicht durch die Grössen h, sondern aus der Summe oder Differenz der bereits für diese Kante gegebenen Poldistanzen ermittelt wird.

Schliesslich sollen die Axen des Vierecks noch einer kurzen Betrachtung unterworfen werden. Bezieht man auch die vierte Kante auf das bisher benutzte Coordinatensystem, so kommt zu den Gleichungen 27) noch eine vierte hinzu. Es gilt dort die Voraussetzung, dass der Winkel zwischen den positiven Richtungen der z-Axe und der zweiten Pollinie kleiner als 180^0 sei. Diese Bedingung lässt sich beim Hinzutreten einer vierten Kante nicht allgemein erfüllen. Dessenungeachtet kann man auch hier das gedachte Coordinatensystem beibehalten, sobald man das Zeichen von d_4 wechselt, wenn die Pollinie nach der vierten Kante nicht im positiven Halbkreise liegt. Der Analogie halber soll aber eine andere Bezeichnung eingeführt werden. Die kürzesten Abstände und die Winkel ∂ mögen jetzt nicht mehr das Zeichen der gegenüberliegenden, sondern derjenigen Kante

führen, welche sie mit der ersten Kante verbinden. Ebenso erhalten die Grössen d und u an der ersten Kante den Index 3 oder 4, je nachdem sie sich auf die dritte oder vierte Kante beziehen. Mit dieser Bezeichnung geht die Formel 35) in folgende über:

$$46)\quad tg\, i_{23} = \frac{k_3 \cot g\, \partial_3 \cos v \sin(v-u_3) - k_2 \cot g\, \partial_2 \sin v \cos(v-u_3) - d_3 \cos v \cos(v-u_3)}{k_3 \cos v - k_2 \cos(v-u_3)}.$$

Der Winkel i_{23} bezieht sich auf diejenige Axe, welche die Kanten 1), 2) und 3) verbindet. Analog hat man für die Axe der Kanten 1), 2), 4) folgende Gleichung:

$$47)\quad tg\, i_{24} = \frac{k_4 \cot g\, \partial_4 \cos v \sin(v-u_4) - k_2 \cot g\, \partial_2 \sin v \cos(v-u_4) - d_4 \cos v \cos(v-u_4)}{k_4 \cos v - k_2 \cos(v-u_4)}.$$

Im Allgemeinen haben die Winkel i_{23} und i_{24} verschiedene Werthe; wenn aber die durch die erste Kante gelegte Ebene eine Axe des Vierecks trifft, so sind beide Winkel gleich gross. Es soll nun der Winkel v bestimmt werden, welcher einer solchen Lage der gedachten Ebene entspricht. Setzt man die Ausdrücke der 46) und 47) einander gleich und führt die Multiplication aus, so folgt

$$\begin{aligned}
&k_4 k_3 \cot g\, \partial_3 \cos v^2 . \sin(v-u_3) - k_4 k_2 \cot g\, \partial_2 \cos v . \sin v \cos(v-u_3)\\
&- k_4 . d_3 \cos v^2 \cos(v-u_3) - k_2 k_3 \cot g\, \partial_3 \cos v . \sin(v-u_3) \cos(v-u_4)\\
&+ k_2^2 \cot g\, \partial_2 \sin v \cos(v-u_3) \cos(v-u_4) + k_2 d_3 \cos v . \cos(v-u_3) \cos(v-u_4)\\
&= k_3 k_4 \cot g\, \partial_4 \cos v^2 . \sin(v-u_4) - k_3 k_2 \cot g\, \partial_2 \cos v . \sin v \cos(v-u_4)\\
&- k_3 d_4 \cos v^2 \cos(v-u_4) - k_2 k_4 \cot g\, \partial_4 \cos v \sin(v-u_4) \cos(v-u_3)\\
&+ k_2^2 \cot g\, \partial_2 \sin v \cos(v-u_3) \cos(v-u_4)\\
&+ k_2 d_4 \cos v \cos(v-u_3) \cos(v-u_4).
\end{aligned}$$

Von Wichtigkeit ist der Umstand, dass nach Wegfall der Glieder, welche sich aufheben, alle übrigen durch $\cos v$ theilbar sind, weil sich dadurch der Grad der Gleichung um Eins vermindert.

Entwickelt man nun die Ausdrücke und gebraucht folgende Abkürzungen:

$$\begin{aligned}
&k_2 k_4 \cot g\, \partial_4 \sin u_3 \cos u_4 + k_2 (d_3 - d_4) \sin u_3 \sin u_4\\
&- k_2 \cot g\, \partial_2 (k_4 \sin u_3 - k_3 \sin u_4) - k_2 k_3 \cot g\, \partial_3 \cos u_3 \sin u_4 = C,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&k_3 k_4 (\cot g\, \partial_3 \cos u_3 - \cot g\, \partial_4 \cos u_4) + k_2 \sin(u_3+u_4)(d_3-d_4)\\
&+ k_2 \cot g\, \partial_2 (k_3 \cos u_4 - k_4 \cos u_3) + k_3 d_4 \sin u_4 - k_4 d_3 \sin u_3\\
&- k_2 \cos(u_3+u_4)(k_3 \cot g\, \partial_3 - k_4 \cot g\, \partial_4) = B,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&k_2 (k_3 \cot g\, \partial_3 \sin u_3 \cos u_4 - k_4 \cot g\, \partial_4 \sin u_4 \cos u_3)\\
&+ k_2 \cos u_3 \cos u_4 (d_3 - d_4) + k_3 d_4 \cos u_4 - k_4 d_3 \cos u_3\\
&- k_3 k_4 (\cot g\, \partial_3 \sin u_3 - \cot g\, \partial_4 \sin u_4) = A,
\end{aligned}$$

so erhält man die Gleichung

$$C . \sin v^2 + B \sin v . \cos v + A . \cos v^2 = 0,$$

und daraus ergiebt sich schliesslich der Winkel v durch die Relation

$$48)\qquad tg\,v = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4.A.C}}{2.C}.$$

Diese Gleichung beweist, dass ein Viereck zwei verschiedene Axen hat. Es ist das grösste Liniensystem, welches überhaupt noch durch eine Axe verbunden werden kann. Wollte man weiter gehen und auch das Fünf- oder Sechseck etc. ähnlichen Betrachtungen unterwerfen, so würde man dazu nur noch parallele Partialaxen verwenden können.

§ 9. Ueber die Anwendung der Linienvielecke.

Geodätische Operationen, welche die Ermittelung der Erdoberfläche zum Zwecke haben, gehen vorzugsweise darauf hinaus, eine grosse Anzahl von Flächennormalen zu bestimmen, weil durch die Lage dieser Linien zugleich die Fläche gegeben ist. Es würde sehr schwer, ja vielleicht nicht möglich sein, diese Aufgabe mit der erforderlichen Genauigkeit zu erfüllen, wenn nicht eine feste Richtung vorhanden wäre, auf welche die Normalen bezogen werden können und die zur Orientirung des Ganzen und Einzelnen dient. Diese feste Richtung ist die Rotationsaxe. Sie wird astronomisch beobachtet und ist daher jedem Flächenpunkte zugänglich. — Betrachtet man nun die zu ermittelnden Flächennormalen als die Kanten eines Linienvielecks und die Rotationsaxe als die feste Richtung der parallelen Partialaxen des Systems, so ist unmittelbar zu erkennen, dass die eben erörterte Aufgabe der Geodäsie durch die Theorie der Linienvielecke ihre Erledigung findet. In den vorigen Paragraphen sind auch bereits die technischen Ausdrücke so gewählt worden, dass der Zusammenhang zwischen Theorie und Praxis klar hervortritt; es wird daher nicht nöthig sein, noch specielle Erläuterungen über die Anwendung der verschiedenen Formeln und Sätze zu geben.

Die Methode, mittels der Linienvielecke die Fläche oder wenigstens die Flächennormalen zu bestimmen, unterliegt in theoretischer Hinsicht keiner Beschränkung, weil sie unabhängig von der Fläche ist. Inwieweit dieselbe aber in der Praxis Verwerthung finden kann, soll später erörtert werden.

Zum Schlusse mögen noch die aus einer numerischen Berechnung hervorgegangenen Grössen eines Liniendreiecks hier angeführt werden.

Es sei gegeben das Dreieck 1)2)3) durch die Zweiecke

$$1)2)\left\{\begin{array}{l} q_{12} = \ 36'\ 27{,}24''; \ a_{12} = 147^0\ 48'\ 26{,}77''; \ \pi_1 = 45^0\ 40'; \ s_{12} = 11{,}75916\ \text{Mln.} \\ q_{21} = -1^0\ 23'\ 32{,}78''; \ a_{21} = 31^0\ 46'\ 24{,}61''; \ \pi_2 = 45^0 - ; \end{array}\right\},$$

$$2)3)\left\{\begin{array}{l} q_{23} = -1^0\ 16'\ 36{,}66''; \ a_{23} = 130^0\ 11'\ 27{,}83''; \ \pi_2 = 45^0 \\ q_{32} = \ 15'\ 17{,}4''; \ a_{32} = 49^0\ \ 2'\ 35{,}33''; \ \pi_3 = 44^0\ 20' \end{array}\right\},$$

$$1)3)\left\{\begin{array}{l} q_{13} = -41'\ 23{,}98''; \ a_{13} = 164^0\ 54'\ \ 5{,}32''; \ \pi_1 = 45^0\ 20' \\ q_{31} = -41'\ 24{,}0''; \ a_{31} = 14^0\ 44'\ 41{,}80''; \ \pi_3 = 44^0\ 20' \end{array}\right\}.$$

Man hat zuerst die Dreieckswinkel, welche aus der Differenz der Azimuthe hervorgehen, mittels der Formel 38a) auf das Sehnendreieck zu reduciren. Es kommt

$$A_1 = 47^0\ 18'\ 28{,}26'',$$
$$A_2 = 98^0\ 22'\ 53{,}73'',$$
$$A_3 = 34^0\ 18'\ 38{,}02''.$$

Durch die Sinusregel ermittelt man die Seiten des Dreiecks, nämlich

$$s_{12} = 11{,}75916 \text{ Meilen},$$
$$s_{13} = 20{,}63865 \quad ,,$$
$$s_{23} = 15{,}33334 \quad ,,$$

Nunmehr berechnet man mittels der 26) die sphärischen Correctionen. So giebt z. B. im Zweieck 1)2) die Formel 26b) den angenäherten Werth

$$w_1 = 7'\ 46{,}92''.$$

Denselben verwendet man zur Ermittelung der kleinen Grösse dw. Nach 26c) kommt

$$dw = 0{,}11''.$$

Reducirt man nun die gegebenen Azimuthe auf die symmetrischen und corrigirt demnach die sphärische Correction, so kommt schliesslich

$$w_1 = 7'\ 40{,}12''.$$

Man ersieht daraus die grosse Empfindlichkeit der sphärischen Azimuthe gegen die kleine Grösse dw. Hätte man dw vernachlässigt oder, was dasselbe heisst, wären die Azimuthe a_{12} und a_{21} wie symmetrische behandelt worden, so würde eine Differenz von 6″ bis 7″ am sphärischen Azimuthe entstanden sein. — Die Ausführung dieser Rechnungen für sämmtliche Zweiecke führt auf folgende Resultate:

$$w_{12} = 7'\ 40{,}12'', \quad \alpha_{12} = 147^0\ 56'\ 6{,}89'',$$
$$w_{21} = 7'\ 40{,}23'', \quad \alpha_{21} = 31^0\ 38'\ 44{,}38'',$$
$$w_{23} = 8'\ 19{,}93'', \quad \alpha_{23} = 130^0\ 19'\ 47{,}76'',$$
$$w_{32} = 8'\ 19{,}81'', \quad \alpha_{32} = 48^0\ 54'\ 15{,}52'',$$
$$w_{13} = 4'\ 13{,}02'', \quad \alpha_{13} = 164^0\ 58'\ 18{,}34'',$$
$$w_{31} = 4'\ 13{,}02'', \quad \alpha_{31} = 14^0\ 40'\ 28{,}78''.$$

Nunmehr ist man im Stande, die übrigen Grössen des sphärischen Kantendreiecks nach bekannten sphärischen Formeln und schliesslich die Linienelemente nach den Gleichungen IX), 19) und 32) zu berechnen. Es folgt:

I. Das sphärische Dreieck:

$$\partial_1 = 1^0\ 1'\ 19{,}33'', \quad \lambda_1 = 1^0\ 5'\ 21{,}35'', \quad u_1 = 47^0\ 5'\ 34{,}77'',$$
$$\partial_2 = 1^0\ 22'\ 45{,}86'', \quad \lambda_2 = -30', \quad u_2 = 98^0\ 41'\ 3{,}38'',$$
$$\partial_3 = 47'\ 5{,}54'', \quad \lambda_3 = -35'\ 21{,}32'', \quad u_3 = 34^0\ 13'\ 46{,}74''.$$

II. Die linearen Grössen des Liniendreiecks:

$$k_1 = 743{,}09, \quad d_1 = 18113{,}46, \quad l_1 = 1378{,}52 \text{ Fuss},$$
$$k_2 = 506{,}30, \quad d_2 = 24824{,}31, \quad l_2 = 2794{,}11 \quad ,,$$
$$k_3 = -524{,}60, \quad d_3 = -42937{,}82, \quad l_3 = 1414{,}04 \quad ,,$$

Zum Schlusse sollen noch die Differenzen $z-p$ nach den Formeln 42) und 44) ermittelt werden. Man erhält erstens

$\varrho_1 = 859{,}42$,	$\varrho_2 = 857{,}28$,	$\varrho_3 = 858{,}19$ Meilen,
$r_0 = 859{,}10$,	$r_0 = 859{,}10$,	$r_0 = 859{,}10$ „
$r_0 - \varrho_1 = -0{,}32$,	$r_0 - \varrho_2 = 1{,}82$,	$r_0 - \varrho_3 = 0{,}91$ Meilen.

Wendet man diese Werthe zur Berechnung der 44) an, so folgt endlich

$$z_1 - p_1 = -0{,}0055'', \quad z_2 - p_2 = -0{,}0095'', \quad z_3 - p_3 = 0{,}015''.$$

Die Unterschiede sind demnach verschwindend klein.

Cap. II.

Das Flächenelement.

§ 1.

Die höhere Geodäsie beschäftigt sich hauptsächlich mit der Flächenermittelung; deshalb ist es auch nöthig, die allgemeinen Eigenschaften der Flächen oder — da eine solche Discussion zu weit führen würde — wenigstens der Flächenelemente kennen zu lernen. Diese Untersuchungen erfordern eine wiederholte Differentiation der Flächengleichung

$$w(x, y, z) = 0.$$

Die erste Ableitung führt, wenn man, was hier immer geschieht, nach dem Bogen differentiirt, auf die Gleichung

$$1) \qquad \frac{dw}{dx}x' + \frac{dw}{dy}y' + \frac{dw}{dz}z' = 0.$$

Die Grössen x', y', z' stellen die Cosinus der Richtungswinkel der Tangente vor; die Coefficienten derselben hingegen verhalten sich wie die Cosinus p, q, r der Richtungswinkel der Flächennormale. Man hat daher die Gleichungen

$$2) \qquad \frac{dw}{dx} = -p.t, \quad \frac{dw}{dy} = -q.t, \quad \frac{dw}{dz} = -r.t,$$

$$t = \sqrt{\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2}.$$

Führt man nun folgende Abkürzungen ein:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \alpha, \quad \frac{d^2w}{dy^2} = \beta, \quad \frac{d^2w}{dz^2} = \gamma, \quad \frac{d^2w}{dx\,dy} = w, \quad \frac{d^2w}{dx\,dz} = v, \quad \frac{d^2w}{dy\,dz} = u,$$

und differentiirt die 1) von Neuem, so erhält man

$$\alpha x'^2 + \beta y'^2 + \gamma z'^2 + 2.w.x'y' + 2.v.x'z' + 2.u.y'z' = t\,(px'' + qy'' + rz'').$$

Dem Ausdrucke rechts vom Gleichheitszeichen kann man eine andere Gestalt geben. Multiplicirt und dividirt man denselben mit dem Krümmungsradius ϱ des Normalschnittes und berücksichtigt die bekannten Relationen

$$\varrho x'' = p, \quad \varrho y'' = q, \quad \varrho z'' = r,$$

so resultirt ein Ausdruck für den Radius ϱ in folgender Form

3) $$\frac{t}{\varrho} = \alpha x'^2 + \beta y'^2 + \gamma z'^2 + 2u y' z' + 2v z' x' + 2w x' y'.$$

Die Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ gehört dem Normalschnitt mit der Tangente $x'y'z'$ an. Eine zweite Krümmung $\frac{1}{\varrho_1}$, welche sich auf die Tangente $x'_1 y'_1 z'_1$ bezieht, wird in ähnlicher Weise durch die Gleichung

3a) $$\frac{t}{\varrho_1} = \alpha x'^2_1 + \beta y'^2_1 + \gamma z'^2_1 + 2u y'_1 z'_1 + 2v z'_1 x'_1 + 2w x'_1 y'_1$$

dargestellt. Addirt man die 3) und die 3a), so folgt für die Summe der beiden Krümmungen der Ausdruck

3b) $$t\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1}\right) = \alpha (x'^2 + x'^2_1) + \beta (y'^2 + y'^2_1) + \gamma (z'^2 + z'^2_1)$$
$$+ 2u (y'z' + y'_1 z'_1) + 2v (z'x' + z'_1 x'_1) + 2w (x'y' + x'_1 y'_1).$$

Setzt man voraus, dass die Tangenten $x'y'z'$ und $x'_1 y'_1 z'_1$ senkrecht aufeinander stehen, so hat man in Hinsicht auf die Normale pqr ein System von drei rechtwinkligen Linien, für welches bekanntlich folgende Relationen stattfinden:

$$x'^2 + x'^2_1 + p^2 = y'^2 + y'^2_1 + q^2 = z'^2 + z'^2_1 + r^2 = 1,$$
$$x'y' + x'_1 y'_1 + pq = x'z' + x'_1 z'_1 + pr = y'z' + y'_1 z'_1 + qr = 0.$$

Eliminirt man durch diese Gleichungen die Ausdrücke

$$x'^2 + x'^2_1, \quad y'^2 + y'^2_1 \ldots \text{ etc.}$$

in 3b), so kommt schliesslich

4) $$t\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1}\right) = \alpha(1-p^2) + \beta(1-q^2) + \gamma(1-r^2) - 2uqr - 2vrp - 2wpq.$$

Diese Gleichung ist unabhängig von der Tangente, sie gehört nur der Fläche an und involvirt den bekannten Satz: Die Summe zweier Flächenkrümmungen, welche senkrecht auf einander stehen, ist constant für alle Richtungen der Tangente.

§ 2.

Betrachtet man in der 1) die Grössen x', y' und z' als Constante, bezeichnet sie beziehungsweise mit a, b und c und differentiirt die in dieser Weise umgestaltete Gleichung

5) $$\frac{dw}{dx} \cdot a + \frac{dw}{dy} \cdot b + \frac{dw}{dz} \cdot c = 0$$

von Neuem, so folgt

6) $(\alpha x' + w y' + v z')\, a + (w x' + \beta y' + u z')\, b + (v x' + u y' + \gamma z')\, c = 0.$

Ordnet man die Glieder nach x', y', z', so kommt ferner

7) $(\alpha a + w b + v c)\, x' + (w a + \beta b + u c)\, y' + (v a + u b + \gamma c)\, z' = 0.$

Aus diesen beiden Formen ist sofort zu ersehen, dass man die Grössen x', y', z' und a, b, c vertauschen kann, ohne damit eine Aenderung der Gleichung zu bewirken. Geht man daher mit constanter Tangente abc um eine kleine Strecke ds auf der Fläche weiter, so liegt das Curvenelement in der Richtung $x'y'z'$; geht man umgekehrt mit constanter Tangente $x'y'z'$ vom Anfangspunkte aus, so verfolgt die Curve die Richtung abc. Diese beiden Richtungen, die in so einfacher Beziehung zu einander stehen, nennt man die conjugirten Tangenten.

Wird die eine derselben, nämlich abc, als bekannt vorausgesetzt, so lässt sich die andere leicht bestimmen. Es reicht dazu die Relation

$$-px' - py' - rz' = 0$$

in Verbindung mit der 7) vollkommen aus. Man erhält durch dieselben

8)
$$\begin{aligned} -t_2 x' &= (w a + \beta b + u c)\, r - (v a + u b + \gamma c)\, q, \\ -t_2 y' &= (v a + u b + \gamma c)\, p - (\alpha a + w b + v c)\, r, \\ -t_2 z' &= (\alpha a + w b + v c)\, q - (w a + \beta b + u c)\, p. \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen bedeutet t_2 die Wurzel aus der Quadratsumme der Glieder rechts vom Gleichheitszeichen.

Nunmehr kann auch der Winkel zwischen den beiden conjugirten Tangenten, der mit ζ bezeichnet werden soll, ermittelt werden. Multiplicirt man die 8) der Reihe nach mit a, b und c und addirt, so folgt eine Gleichung von der Form

$$-t_2 \cos\zeta = a(\,) + b(\,) + c(\,).$$

Bevor zur speciellen Entwickelung der Ausdrücke geschritten wird, führt man neue Grössen, a_1, b_1 und c_1, ein, welche die Cosinus der Richtungswinkel einer Tangente vorstellen, die senkrecht auf der Tangente abc steht. Dadurch erhält man das Liniensystem

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ p & q & r \\ a & b & c \end{matrix}$$

und die Gleichungen

$$a_1 = q.c - r.b, \quad b_1 = r.a - p.c, \quad c_1 = p.b - q.a.$$

Führt man nun die oben angedeutete Multiplication aus, verbindet stets ein positives Glied mit dem entsprechenden negativen und eliminirt schliesslich die Grössen p, q, r mittels der vorigen Gleichungen, so folgt ohne Weiteres die Gleichung

$$-t_2 \cos\zeta = (w a + \beta b + u c)\, b_1 + (v a + u b + \gamma c)\, c_1 + (\alpha a + w b + v c)\, a_1,$$

die man, anders geordnet, auch schreiben kann:

9) $$-t_2 \cos\zeta = \alpha a a_1 + \beta b b_1 + \gamma c c_1 + u(b c_1 + b_1 c) + v(a c_1 + a_1 c) + w(a b_1 + a_1 b).$$

Dies ist die Gleichung für den Cosinus des Winkels zwischen den beiden conjugirten Tangenten.

Einen ähnlichen Ausdruck kann man ableiten, wenn man in der 3) für x', y', z' die Zeichen a, b, c einführt, nach diesen Grössen differentiirt und das Differential $=0$ setzt. Denn es folgt dann

10) $$0 = \alpha a a' + \beta b b' + \gamma c c' + u(b c' + c b') + v(a c' + c a') + w(a b' + b a').$$

Die Derivationen a', b' und c' werden durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$a a' + b b' + c c' = p a' + q b' + r c' = 0.$$

Dieselben verhalten sich demnach wie die Cosinus der Richtungswinkel einer Tangente, welche auf der Richtung $a\,b\,c$ senkrecht steht, und entsprechen mithin vollkommen den Grössen a_1, b_1 und c_1 in der 9). Die Ausdrücke der 9) und 10) werden daher identisch, wenn man in beiden Gleichungen die Grössen a, b, c identificirt. Aus der Art und Weise, wie die 10) abgeleitet worden ist, geht aber hervor, dass die Tangente $a\,b\,c$ einer Richtung entspricht, in welcher die Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ ihren Maximal- oder Minimalwerth besitzt; sie liegt also in einem der Hauptschnitte. Daher folgt der Satz:

Der Cosinus des Winkels zwischen den conjugirten Tangenten ist $=0$, sobald die letzteren mit der Richtung der Hauptschnitte zusammenfallen. Die Tangenten der Hauptschnitte sind conjugirte Tangenten und stehen auf einander senkrecht.

§ 3.

Die bisher entwickelten Formeln gestalten sich weit einfacher, wenn zu einem besondern Coordinatensystem übergegangen wird. Nimmt man die Flächennormale zur Z-Axe, die Richtungen der grössten und kleinsten Krümmung zur X-, resp. Y-Axe und verlegt die Spitze des Systems in den Flächenpunkt, dann erhält man die besonderen Werthe

für die Normale: $p = q = 0$, $r = 1$,

„ „ Tangente: $x' = \cos\varphi$, $y' = \sin\varphi$, $z' = 0$,

für eine Tangente, welche auf der vorigen senkrecht steht:

$$x'_1 = -\sin\varphi, \quad y'_1 = \cos\varphi, \quad z'_1 = 0.$$

Setzt man dieselben in die 9), so resultirt folgende Gleichung:

$$-\cos\zeta = \frac{(\beta - \alpha)\cos\varphi\sin\varphi + w(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2)}{\sqrt{(w\cos\varphi + \beta\sin\varphi)^2 + (\alpha\cos\varphi + w\sin\varphi)^2}}.$$

Nach dem Vorhergehenden muss $\cos\zeta = 0$ sein, wenn die Tangente mit einem der Hauptschnitte zusammenfällt oder, was dasselbe heisst, wenn

$\varphi = 0$ oder $= \frac{\pi}{2}$ ist. Dieser Bedingung kann in der vorstehenden Gleichung nur dadurch genügt werden, dass $w = 0$ gesetzt wird. Es folgt daher

$$\cos\zeta = \frac{(\alpha - \beta)\cos\varphi \sin\varphi}{\sqrt{\alpha^2 \cos\varphi^2 + \beta^2 \sin\varphi^2}}.$$

Führt man nun die besonderen Werthe in die 3) ein, so erhält man

$$\frac{1}{\varrho} = \alpha \cos\varphi^2 + \beta \sin\varphi^2.$$

Daraus lässt sich die grösste und kleinste Krümmung $\frac{1}{\varrho_0}$ und $\frac{1}{\varrho_1}$ ableiten, je nachdem der Winkel $\varphi = 0$ oder $= \frac{\pi}{2}$ gesetzt wird. Es folgt nämlich

10a) $$\frac{t}{\varrho_0} = \alpha, \quad \frac{t}{\varrho_1} = \beta.$$

Diese Grössen substituirt man in die vorigen Gleichungen und erhält dadurch Folgendes:

11) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos\varphi^2}{\varrho_0} + \frac{\sin\varphi^2}{\varrho_1},$$

12) $$\cos\zeta = \frac{\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho_1}\right)\cos\varphi \sin\varphi}{\sqrt{\frac{\cos\varphi^2}{\varrho_0^2} + \frac{\sin\varphi^2}{\varrho_1^2}}}.$$

Bezeichnet man die Differenz der Hauptkrümmungen mit d, sowie den Ausdruck im Nenner mit ∂', so nimmt die letzte Gleichung folgende Gestalt an:

12a) $$\cos\zeta = \frac{d\cos\varphi \sin\varphi}{\partial'} = \frac{d \sin 2\varphi}{2\partial'}.$$

Es lässt sich aus den Entwickelungen des vorigen Paragraphen noch eine andere Gleichung für den Winkel ζ ableiten. Giebt man nämlich in der 6) der Tangente abc folgende Richtung:

$$a = \cos\varphi. \quad b = \sin\varphi, \quad c = 0,$$

so bekommt man daraus für die conjugirte Tangente $x'y'z'$ die Richtungsgrössen

$$x' = \cos(\varphi + \zeta), \quad y' = \sin(\varphi + \zeta), \quad z' = 0.$$

Durch Substitution dieser Grössen erhält man die Gleichung

$$\alpha \cos\varphi \cos(\varphi + \zeta) + \beta \sin\varphi \sin(\varphi + \zeta) = 0,$$

welche sich auch auf die Form bringen lässt:

12b) $$tg\varphi \,.\, tg(\varphi + \zeta) = -\frac{\varrho_1}{\varrho_0}.$$

§ 4.

Es bleiben nun noch die benachbarten Normalen zu betrachten. Man differentiirt zu diesem Zwecke die Grössen p, q, r und erhält dadurch folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} -p't &= pt' + \alpha x' + wy' + vz', \\ -q't &= qt' + wx' + \beta y' + uz', \\ -r't &= rt' + vx' + uy' + \gamma z'. \end{aligned} \qquad 13)$$

Multiplicirt man der Reihe nach mit p, q, r und addirt, so kommt

$$14) \quad -t' = p(\alpha x' + wy' + vz') + q(wx' + \beta y' + uz') + r(vx' + uy' + \gamma z').$$

Diese Formeln kürzen sich ab, sobald das im vorigen Paragraphen eingeführte besondere Coordinatensystem zur Anwendung gebracht wird. Man erhält nämlich

$$\begin{aligned} -p' &= \frac{\cos\varphi}{\varrho_0}, \qquad -q' = \frac{\sin\varphi}{\varrho_1}, \qquad -r' = 0, \\ -t' &= v\cos\varphi + u\sin\varphi. \end{aligned} \qquad 15)$$

Nunmehr lässt sich ohne Schwierigkeit der Winkel $d\vartheta$ ermitteln, den zwei benachbarte Normalen mit einander bilden. Man hat dafür bekanntlich die allgemeine Formel

$$\vartheta'^2 = p'^2 + q'^2 + r'^2.$$

Setzt man die obigen Werthe ein, so folgt

$$16) \quad \vartheta'^2 = \frac{\cos\varphi^2}{\varrho_0^2} + \frac{\sin\varphi^2}{\varrho_1^2}.$$

Es lässt sich noch eine zweite Gleichung für ϑ' ableiten. Multiplicirt man nämlich die 13) der Reihe nach mit a, b, c, addirt und vergleicht die Summe mit der 15), so folgt das Resultat

$$ap' + bq' + cr' = 0.$$

Stellt man daneben die bekannte Relation

$$pp' + qq' + rr' = 0,$$

so ist ersichtlich, dass sich die Grössen $p'q'r'$ verhalten wie die Cosinus der Richtungswinkel einer Tangente, welche auf der conjugirten Tangente abc senkrecht steht. Der Winkel zwischen den Richtungen $p'q'r'$ und $x'y'z'$ bildet demnach das Complement des Winkels zwischen den conjugirten Tangenten. Daher folgt die Gleichung

$$-\sin\zeta = \frac{p'x' + q'y' + r'z'}{\vartheta'}.$$

Wenn man die Werthe aus den 15) einsetzt, so nimmt sie die einfachere Gestalt an:

$$17) \quad \sin\zeta = \frac{1}{\varrho\vartheta'}.$$

Die ϱ und ϑ' beziehen sich auf eine bestimmte Tangente des Flächenpunktes. Hat man mehrere dieser Grössen zu betrachten, so ist es nöthig,

zur Unterscheidung derselben das Zeichen der Tangente beizufügen. Dadurch erhält man z. B. für die beiden Tangenten abc und $x'y'z'$ die entsprechenden Gleichungen

$$\sin\zeta_a = \frac{1}{\varrho_a \partial'_a}, \quad \sin\zeta_x = \frac{1}{\varrho_x \partial'_x}.$$

Dieselben lassen sich auf einfache Weise mit einander verknüpfen, sobald vorausgesetzt wird, dass die Richtungen abc und $x'y'z'$ conjugirten Tangenten angehören; denn es bedarf weiter keiner Erläuterung, dass in diesem Falle sich die Winkel ζ_a und ζ_x zu 180^0 ergänzen und die Sinus derselben einander gleich sind. Man erhält daher die Relationen

18) $$\varrho_a \partial'_a = \varrho_x \partial'_x,$$

19) $$\partial'_a \partial'_x = \frac{1}{\varrho_a \varrho_x \sin\zeta^2}.$$

In Bezug auf die 19) verdient besonders erwähnt zu werden, dass sie unabhängig von der Richtung der Tangente ist. Dies lässt sich durch folgende Entwickelungen nachweisen. Bringt man die 12 b) auf die Form

$$\frac{\cos\varphi \cos(\varphi+\zeta)}{\varrho_0} + \frac{\sin\varphi \sin(\varphi+\zeta)}{\varrho_1} = 0$$

und quadrirt sie, so folgt

$$\frac{\cos\varphi^2 \cos(\varphi+\zeta)^2}{\varrho_0^2} + \frac{\sin\varphi^2 \sin(\varphi+\zeta)^2}{\varrho_1^2} + \frac{2\cos\varphi \sin\varphi \cos(\varphi+\zeta)\sin(\varphi+\zeta)}{\varrho_0\varrho_1} = 0.$$

Ferner erhält man, wenn die Ausdrücke für $\frac{1}{\varrho_a}$ und $\frac{1}{\varrho_x}$ mit einander multiplicirt werden, Folgendes:

$$\frac{1}{\varrho_a \varrho_x} = \frac{\cos\varphi^2 \cos(\varphi+\zeta)^2}{\varrho_0^2} + \frac{\sin\varphi^2 \sin(\varphi+\zeta)^2}{\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_0\varrho_1}\left[\cos\varphi^2 \sin(\varphi+\zeta)^2 + \sin\varphi^2 \cos(\varphi+\zeta)^2\right].$$

Subtrahirt man beide Gleichungen von einander, so kommt schliesslich

$$\frac{1}{\varrho_0 \varrho_1 \sin\zeta^2} = \frac{1}{\varrho_0 \varrho_1}.$$

Der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen ist augenscheinlich eine Constante des Flächenpunktes, d. h. er ist unabhängig von der Tangente. Man kann die 19) daher auch schreiben:

20) $$\partial'_a \partial'_x = \frac{1}{\varrho_a \varrho_x \sin\zeta^2} = \frac{1}{\varrho_0 \varrho_1} = const.$$

Multiplicirt man das erste Glied der vorigen Gleichung im Zähler und Nenner mit $\frac{\sin\zeta}{2}$, so kommt

21) $$\frac{\frac{1}{2} d\partial_a d\partial_x \sin\zeta}{\frac{1}{2} ds_a ds_x \sin\zeta} = \frac{1}{\varrho_0 \varrho_1}.$$

Der Nenner stellt die Fläche des durch die beiden Linienelemente ds_a und ds_x gebildeten Dreiecks dar; der Zähler hingegen repräsentirt den Inhalt eines sphärischen Dreiecks, welches dadurch entstanden ist, dass die drei benachbarten Flächennormalen an den Mittelpunkt einer Kugel mit dem Radius $=1$ versetzt worden sind. Der Quotient dieser beiden Flächen wird nach Gauss das Krümmungsmass genannt. Die Gleichung 21) spricht daher den bekannten Satz aus, dass das Krümmungsmass eines Flächenpunktes gleich dem Producte aus den beiden Hauptkrümmungen ist.

Zum Schlusse mögen noch einige Liniengrössen, nämlich der kürzeste Abstand k und die Entfernung r vom Flächenpunkte bis zum Pole der benachbarten Normalen, angeführt werden. Durch eine einfache geometrische Betrachtung erhält man für die genannten Grössen folgende Gleichungen:

22) $$k = ds \,.\, cos\,\zeta,$$

23) $$r\,\partial' = sin\,\zeta.$$

Diese Formeln gehen übrigens auch aus den 22) und 23) des ersten Capitels unmittelbar hervor, wenn man den Winkel $\partial = 0$ setzt.

§ 5.

Durch die Entwickelungen der vorigen Paragraphen haben sich die nächstliegenden Eigenschaften der Flächenelemente ergeben; sie beziehen sich auf die Krümmung, auf die conjugirten Tangenten und auf die benachbarten Normalen. Die Kenntniss dieser Eigenschaften verschafft aber nur ein sehr unvollständiges Bild des in Rede stehenden Objects. Vergleicht man z. B. zwei unendlich kleine Theile einer Rotationsfläche, von denen der eine am Aequator, der andere in beliebiger Breite liegt, so ist es nicht schwer, einen Unterschied zwischen beiden nachzuweisen. Am äquatorealen Elemente nämlich sind beide Systeme der Hauptschnitte einander parallel, am andern Flächenelemente hingegen findet man ein System paralleler und ein System divergirender Hauptschnitte. Reihet man dieser Betrachtung noch ein drittes Element an, welches aus einer beliebigen unregelmässigen Fläche genommen wurde, so kann man dem Vorigen zufolge schliessen, dass hier die benachbarten Hauptschnitte beider Systeme divergirende Linien sind.

Das sind Merkmale und Verschiedenheiten, welche durch die bisherigen analytischen Entwickelungen nicht nachgewiesen werden können. Es ist deshalb nöthig, noch einen Schritt weiter zu gehen und auch die Richtung der Hauptschnitte einer näheren Betrachtung zu unterwerfen.

Bezeichnet man die Richtung der grössten Krümmung mit $a_0 b_0 c_0$, die der kleinsten Krümmung mit $a_1 b_1 c_1$, so hat man nach den 3) und 9) folgende Gleichungen:

$$\frac{t}{\varrho_0} = \alpha a_0^2 + \beta b_0^2 + \gamma c_0^2 + 2w a_0 b_0 + 2v a_0 c_0 + 2u b_0 c_0,$$

25a) $$\frac{t}{\varrho_1} = \alpha a_1^2 + \beta b_1^2 + \gamma c_1^2 + 2w a_1 b_1 + 2v a_1 c_1 + 2u b_1 c_1,$$

$$0 = -[\alpha a_0 a_1 + \beta b_0 b_1 + \gamma c_0 c_1 + w(a_1 b_0 + a_0 b_1) + v(a_1 c_0 + a_0 c_1) + u(b_1 c_0 + b_0 c_1)].$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $b_1 c_1$, $b_0 c_0$ und $b_0 c_1 + c_0 b_1$, addirt sämmtliche Producte und vereinigt die zusammengehörigen Glieder, so folgt

$$\frac{t}{\varrho_0} b_1 c_1 + \frac{t}{\varrho_1} b_0 c_0 = -\alpha qr + p(-pu + qv + rw) = X.$$

In ähnlicher Weise erhält man die beiden anderen Gleichungen:

25b) $$\frac{t}{\varrho_0} a_1 c_1 + \frac{t}{\varrho_1} a_0 c_0 = -\beta pr + q(pu - qv + rw) = Y.$$

$$\frac{t}{\varrho_0} a_1 b_1 + \frac{t}{\varrho_1} a_0 b_0 = -\gamma pq + r(pu + qv - rw) = Z.$$

Eliminirt man in diesen Gleichungen mittels der Relationen

$$b_1 c_1 + b_0 c_0 + qr = 0, \quad a_1 c_1 + a_0 c_0 + pr = 0 \text{ etc.}$$

das eine Mal die Producte $b_1 c_1$, $a_1 c_1$ und $a_1 b_1$, das andere Mal die Glieder $b_0 c_0$, $a_0 c_0$ und $a_0 b_0$, und setzt ferner

$$\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho_1} = d,$$

so kommt

$$\frac{X}{t} = -\frac{qr}{\varrho_1} + d\, b_1 c_1 = -\frac{qr}{\varrho_0} - d\, b_0 c_0,$$

26) $$\frac{Y}{t} = -\frac{pr}{\varrho_1} + d\, a_1 c_1 = -\frac{pr}{\varrho_0} - d\, a_0 c_0,$$

$$\frac{Z}{t} = -\frac{pq}{\varrho_1} + d\, a_1 b_1 = -\frac{pq}{\varrho_0} - d\, a_0 b_0.$$

Aus diesen Gleichungen können die Radien der Krümmungslinien und andere damit zusammenhängende Grössen ermittelt werden. Bezeichnet man die gedachten Radien mit k_0 und k_1, ferner ihre Richtungsgrössen mit p_0, q_0, r_0 und p_1, q_1, r_1, so gelten bekanntlich die Gleichungen

27) $$p_0 = k_0 a'_0, \quad q_0 = k_0 b'_0, \quad r_0 = k_0 c'_0,$$
$$p_1 = k_1 a'_1, \quad q_1 = k_1 b'_1, \quad r_1 = k_1 c'_1.$$

Um nun die Derivationen a'_0, a'_1 etc. zu erhalten, differentiirt man die Gleichungen 26). Es kommt

$$\frac{tX' - Xt'}{t^2} = \frac{-\varrho_1(qr' + rq') - qr\varrho'_1}{\varrho_1^2} + d(b_1 c'_1 + c_1 b'_1) + b_1 c_1 d',$$

1) $$= \frac{-\varrho_0(qr' + rq') - qr\varrho'_0}{\varrho_0^2} - d(b_0 c_0 + c_0 b'_0) - b_0 c_0 d';$$

$$2)\quad \frac{tY'-Yt'}{t^2}=\frac{-\varrho_1(pr'+rp')-pr\varrho'_1}{\varrho_1^2}+d(a_1c'_1+c_1a'_1)+a_1c_1d',$$
$$\frac{-\varrho_0(pr'+rp')-pr\varrho'_0}{\varrho_0^2}-d(a_0c'_0+c_0a'_0)-a_0c_0d';$$

$$3)\quad \frac{tZ'-Zt'}{t^2}=\frac{-\varrho_1(pq'+qp')-pq\varrho'_1}{\varrho_1^2}+d(a_1b'_1+b_1a'_1)+a_1b_1d',$$
$$\frac{-\varrho_0(pq'+qp')-pq\varrho'_0}{\varrho_0^2}-d(a_0b'_0+b_0a'_0)-a_0b_0d'.$$

Im speciellen Coordinatensystem ist nun

$$a_0=1,\quad b_0=0,\quad c_0=0,\quad a_1=0,\quad b_1=1,\quad c_1=0.$$

Führt man diese besonderen Werthe ein, so gehen die vorigen Formeln in folgende über:

$$1)\quad \frac{tX'-Xt'}{t^2}=\frac{-q'}{\varrho_1}+dc'_1=\frac{-q'}{\varrho_0},$$

$$2)\quad \frac{tY'-Yt'}{t^2}=\frac{-p'}{\varrho_1}\qquad =\frac{-p'}{\varrho_0}-dc'_0,$$

$$3)\quad \frac{tZ'-Zt'}{t^2}=da'_1\qquad =-db'_0.$$

Es bleiben nun noch die Glieder links vom Gleichheitszeichen zu entwickeln. Man findet leicht, dass die beiden ersten derselben kein neues Resultat liefern; das dritte Glied hingegen führt auf den Ausdruck

$$\frac{tZ'-Zt'}{t^2}=\frac{up'+vq'}{t}.$$

Setzt man denselben oben ein, so folgen schliesslich die Gleichungen

$$28)\quad 1)\ c'_1=-q',\quad 2)\ c'_0=-p',\quad 3)\ a'_1=-b'_0=\frac{up'+vq'}{td}.$$

Damit sind vier der gesuchten Derivationen ermittelt. Die noch fehlenden Grössen a'_0 und b'_1 sind $=0$, wie aus den Gleichungen

$$a_0a'_0+b_0b'_0+c_0c'_0=0,\quad a_1a'_1+b_1b'_1+c_1c'_1=0$$

unmittelbar hervorgeht.

Setzt man in den 28) den Winkel $\varphi=0$, resp. $=\frac{\pi}{2}$, so erhält man die besonderen Werthe, die zur Ermittelung der Radien der Krümmungslinie gebraucht werden, durch folgende Ausdrücke:

$$c'_1=\frac{1}{\varrho_1},\quad c'_0=\frac{1}{\varrho_0},\quad a'_1=\frac{-v}{\varrho_1td},\quad b'_0=\frac{u}{\varrho_0td}.$$

Substituirt man dieselben in die allgemeinen Gleichungen 27), so kommt endlich

$$29)\quad p_0=0,\qquad q_0=\frac{k_0u}{\varrho_0td},\quad r_0=\frac{k_0}{\varrho_0},$$
$$p_1=\frac{-k_1v}{\varrho_1td},\quad q_1=0,\qquad r_1=\frac{k_1}{\varrho_1}.$$

Aus den vorstehenden Richtungsgrössen der Krümmungsradien k_0 und k_1 lassen sich nun die letzteren selbst auf einfache Weise ableiten. Man erhält, indem man die einzelnen Glieder quadrirt, addirt und die Summe $=1$ setzt, folgende Gleichungen:

30) $$k_0 = \frac{\varrho_0 t d}{\sqrt{u^2 + t^2 d^2}}, \quad k_1 = \frac{\varrho_1 t d}{\sqrt{v^2 + t^2 d^2}}.$$

Die Radien k_0 und k_1 schliessen mit der Flächennormale zwei Winkel ein, welche die localen Polhöhen des Flächenelements genannt werden sollen. Bezeichnet man sie beziehungsweise mit π_0 und π_1, so erhält man dafür aus den 29) die Relationen

31) $$\cos \pi_0 = \frac{k_0}{\varrho_0}, \quad \cos \pi_1 = \frac{k_1}{\varrho_1},$$
$$tg\, \pi_0 = \pm \frac{u}{t d}, \quad tg\, \pi_1 = \mp \frac{v}{t d}.$$

Das Vorzeichen in diesen Formeln ist abhängig von den Grössen p_1 und q_0.

Die localen Polhöhen haben im Allgemeinen beliebige endliche Werthe. Ist eine derselben $=0$, so verschwindet auch die entsprechende Grösse u oder v und das Flächenelement gehört einer Rotationsfläche an oder bildet für sich eine solche Fläche; sind beide Polhöhen $=0$, so hat man ein äquatoreales Flächenelement.

§ 6.

Man gehe zurück zur Gleichung 5). Dieselbe repräsentirt in Verbindung mit der Flächengleichung eine Curve, welche den geometrischen Ort aller Berührungspunkte zwischen der constanten Tangente abc und der Fläche bildet. Diese Curve ist im Allgemeinen eine doppelt gekrümmte Linie; nur dann geht dieselbe in eine einfach gekrümmte über, wenn w eine Fläche zweiten Grades vorstellt. Sie soll die Rolllinie der Fläche genannt und späterhin für den speciellen Fall der Fläche zweiten Grades eingehend behandelt werden.

Für sich allein betrachtet, repräsentirt die Gleichung 5) eine Fläche w_1, welche die ursprünglich gegebene Fläche w in der Rolllinie schneidet. Aus der 5) ging durch Differentiation die 6) hervor, nämlich

$$(\alpha a + w b + v c)\, x' + (w a + \beta b + u c)\, y' + (v a + u b + \gamma c)\, z' = 0.$$

In dieser Gleichung verhalten sich die Coefficienten von x', y', z' wie die Cosinus der Richtungswinkel der Flächennormale von w_1. Stellt man eine zweite Gleichung

$$(\alpha a_1 + w b_1 + v c_1)\, x'_1 + (w a_1 + \beta b_1 + u c_1)\, y'_1 + (v a_1 + u b_1 + \gamma c_1)\, z'_1 = 0$$

auf, welche sich auf die constante Tangente $a_1 b_1 c_1$ bezieht und einer andern Fläche w_2 angehört, so verhalten sich hier die Coefficienten von x'_1, y'_1 und z'_1 wie die Cosinus der Richtungswinkel der Flächennormale von w_2.

Es möge nun die Richtung fgh bestimmt werden, welche auf beiden Flächennormalen senkrecht steht oder, was dasselbe heisst, in welcher sich die Flächen w_1 und w_2 schneiden. Nimmt man zuerst die Grösse f vor, so erhält man nach bekannter Methode

$$\begin{aligned} f t_3 &= (wa + \beta b + uc)(va_1 + ub_1 + \gamma c_1) - (wa_1 + \beta b_1 + uc_1)(va + ub + \gamma c) \\ &= wu(ab_1 - a_1 b) + w\gamma(ac_1 - a_1 c) - \beta v(ab_1 - a_1 b) + \beta\gamma(bc_1 - b_1 c) \\ &\quad + uv(ca_1 - a_1 c) - u^2(bc_1 - b_1 c). \end{aligned}$$

Die Determinanten, welche in diesem Ausdrucke vorkommen, lassen sich durch andere Grössen ersetzen. Man hat nämlich die drei Richtungen

$$\begin{matrix} a & b & c, \\ a_1 & b_1 & c_1, \\ p & q & r, \end{matrix}$$

von welchen die beiden ersteren auf der letzteren senkrecht stehen. Daraus ergeben sich ohne Weiteres folgende Relationen:

$$p = \frac{bc_1 - cb_1}{n}, \quad q = \frac{ca_1 - ac_1}{n}, \quad r = \frac{ab_1 - a_1 b}{n}.$$

Führt man diese Grössen ein, so geht der Ausdruck für f in folgenden über:

$$f t_3 = p(\beta\gamma - u^2) + q(uv - w\gamma) + r(wu - \beta v).$$

Auf gleiche Weise werden auch die Grössen g und h entwickelt, und man erhält, indem man sie alle drei zusammenstellt, die Gleichungen

$$\begin{aligned} f t_3 &= p(\beta\gamma - u^2) + q(uv - w\gamma) + r(uw - v\beta), \\ g t_3 &= p(uv - w\gamma) + q(\alpha\gamma - v^2) + r(vw - u\alpha), \\ h t_3 &= p(uw - v\beta) + q(vw - u\alpha) + r(\alpha\beta - w^2). \end{aligned} \tag{32}$$

t_3 bedeutet auch hier die Wurzel aus der Quadratsumme der Glieder rechts vom Gleichheitszeichen.

Die Grössen f, g, h sind, wie leicht ersichtlich, unabhängig von der Tangente; sie beziehen sich daher auf eine Linie, welche ausschliesslich der Fläche angehört. Diese Linie soll die Centrale des Flächenpunktes genannt werden.

Multiplicirt man die 32) der Reihe nach mit p, q, r und addirt, so erhält man den Cosinus des Winkels ε zwischen der Normale und Centrale durch die Gleichung

$$\begin{aligned} t_3 \cos\varepsilon &= p^2(\beta\gamma - u^2) + q^2(\alpha\gamma - v^2) + r^2(\alpha\beta - w^2) + 2pq(uv - w\gamma) \\ &\quad + 2pr(uw - v\beta) + 2qr(vw - u\alpha). \end{aligned} \tag{33}$$

Geht man nun zum speciellen Coordinatensystem über, nach welchem $p = q = 0$ ist, so kürzen sich die vorigen Formeln in folgender Weise ab:

$$f t_3 = -v\beta, \quad g t_3 = -u\alpha, \quad h t_3 = \alpha\beta; \quad t_3 = \sqrt{u^2 a^2 + v^2\beta^2 + \alpha^2\beta^2}; \tag{34}$$

$$\cos\varepsilon = \frac{\alpha\beta}{t_3}. \tag{35}$$

Die Ebene, welche die Normale und Centrale verbindet, nennt man die Centralebene. Die Pollinie lmn derselben steht senkrecht auf den Richtungen

$$p \quad q \quad r,$$
$$f \quad g \quad h.$$

Daraus erhält man die Richtung dieser Linie durch die Gleichungen

$$l = \frac{-g}{\sqrt{f^2+g^2}}, \quad m = \frac{f}{\sqrt{f^2+g^2}}, \quad n = 0$$

oder, wenn man die bekannten Werthe einsetzt:

36) $$l = \frac{u\alpha}{\sqrt{\alpha^2u^2+\beta^2v^2}}, \quad m = \frac{-\beta v}{\sqrt{\alpha^2u^2+\beta^2v^2}}, \quad n = 0.$$

Senkrecht auf der eben bestimmten Pollinie steht die Tangente der Centralebene, deshalb erhält man für die Richtung $l_1\, m_1\, n_1$ derselben die Werthe

37) $$l_1 = \frac{-v\beta}{\sqrt{u^2\alpha^2+v^2\beta^2}}, \quad m_1 = \frac{-u\alpha}{\sqrt{u^2\alpha^2+v^2\beta^2}}, \quad n_1 = 0.$$

Bezeichnet man die Winkel zwischen der Richtung der grössten Krümmung einerseits und der Pollinie, sowie der Tangente der Centralebene andererseits beziehungsweise mit ψ und ψ_1, so hat man die Gleichungen

$$l = \cos\psi, \; m = \sin\psi; \quad l_1 = \cos\psi_1, \; m_1 = \sin\psi_1.$$

Daher folgt aus den 36) und 37)

38) $$tg\,\psi = \frac{-v\beta}{u\alpha}, \quad tg\,\psi_1 = \frac{u\alpha}{v\beta}.$$

Zum Schlusse soll noch Einiges über die Lage der Centrale bemerkt werden. Aus der Gleichung 34) ist leicht zu ersehen, dass diese Linie im Allgemeinen ausserhalb der Hauptschnitte liegt; nur in besonderen Fällen, wie bei den Rotationsflächen, fällt sie mit einem der Hauptschnitte, nämlich mit der Meridianebene, zusammen. Beim äquatorealen Flächenelemente ist ihre Lage eine ganz bestimmte, denn hier hat sie gleiche Richtung mit der Flächennormale.

§ 7.

Verbindet man irgend eine Tangente $x'y'z'$ mit den beiden Hauptschnitten $a_0b_0c_0$ und $a_1b_1c_1$ durch den Winkel φ, so erhält man die Gleichungen

$$a_0x' + b_0y' + c_0z' = \cos\varphi, \quad a_1x' + b_1y' + c_1z' = \sin\varphi.$$

Werden dieselben differentiirt, so kommt weiter

$$a_0x'' + b_0y'' + c_0z'' + a'_0x' + b'_0y' + c'_0z' = -\sin\varphi.\varphi',$$
$$a_1x'' + b_1y'' + c_1z'' + a'_1x' + b'_1y' + c'_1z' = \cos\varphi.\varphi'.$$

Bei Anwendung des besondern Coordinatensystems und mit Rücksicht darauf, dass die Summe der drei ersten Glieder an sich $=0$ ist, vereinfachen sich die beiden Gleichungen in folgender Weise:

$$b'_0 y' = -\sin\varphi . \varphi', \quad a'_1 x' = \cos\varphi . \varphi',$$
$$b'_0 = -\varphi', \qquad a'_1 = \varphi'.$$

Substituirt man für b'_0 und a'_1 die Werthe aus den 28), so folgt in Hinsicht auf die 15)

39) $$\varphi' = -\frac{u\alpha\cos\varphi + v\beta\sin\varphi}{t^2 d} = -\left(\frac{u\cos\varphi}{\varrho_0 t d} + \frac{v\sin\varphi}{\varrho_1 t d}\right)$$

oder wenn man $-\frac{u}{\varrho_0 t d} = \varphi_0$ und $-\frac{v}{\varrho_1 t d} = \varphi_1$ setzt:

40) $$\varphi' = \varphi'_0 \cos\varphi + \varphi'_1 \sin\varphi.$$

Die Grösse $d\varphi$ repräsentirt den kleinen Winkel, um welchen sich die Hauptschnitte gegen das Curvenelement oder auch — wie man leicht findet gegen die Richtung der conjugirten Tangente drehen, wenn man zu einem benachbarten Flächenpunkte übergeht; sie soll deshalb die Torsion der Hauptschnitte genannt werden.

Setzt man den Ausdruck in der 39) und das Differential desselben $=0$ und löst nach φ auf, so erhält man die beiden Winkel, welche den Grenzwerthen der Torsion entsprechen. Es kommt

41 a) $$tg\,\varphi = -\frac{u\alpha}{v\beta},$$

wenn die Torsion $\varphi' = 0$ ist, und ferner

41 b) $$tg\,\varphi = \frac{v\beta}{u\alpha},$$

wenn die Torsion ihren Maximalwerth φ'_m hat.

Vergleicht man diese Formeln mit der 38), so folgt der Satz:

Die beiden Winkel, welche die Tangenten der kleinsten Torsion und der Centralebene mit der Richtung der grössten Krümmung bilden, ergänzen sich zu 180^0.

Man kann denselben auch so ausdrücken:

Die Tangenten der kleinsten Torsion und der Centralebene bilden mit den Hauptschnitten gleiche Winkel mit ungleichen Vorzeichen.

Am einfachsten gestaltet sich die Lage der beiden erörterten Richtungen an der Rotationsfläche; denn bei dieser fällt die Centralebene, mithin auch die Richtung der kleinsten Torsion, mit dem Meridian zusammen. Beim äquatorealen Flächenelemente ist die Torsion $=0$.

Was schliesslich noch die Maximaltorsion φ'_m betrifft, so ist nur zu bemerken, dass sie, wie aus der 41) unmittelbar hervorgeht, senkrecht gegen die Tangente der kleinsten Torsion gerichtet ist und dass sich für die Grösse derselben leicht die Formel entwickeln lässt:

42) $$\varphi'_m = \frac{\sqrt{u^2\alpha^2 + v^2\beta^2}}{t^2 d}.$$

§ 8.

Ertheilt man in der Flächengleichung $w=0$ den Variabeln x, y, z kleine Intremente dx, dy, dz und entwickelt dieselbe nach dem Taylorschen Satze, so folgt

$$w - pt.dx - qt.dy - rt.dz + \frac{\alpha}{2}dx^2 + \frac{\beta}{2}dy^2 + \frac{\gamma}{2}dz^2 + u.dy.dz + v.dx.dz + w.dx.dy = 0.$$

Diese Gleichung repräsentirt nicht mehr die ganze Fläche w, sondern nur einen kleinen Theil derselben, und es ist klar, dass die Dimensionen dieses Flächentheils bemessen werden müssen nach der Grenze, bei welcher ihre dritten Potenzen aufhören, verschwindend kleine Grössen zu sein. Innerhalb dieser Grenze müssen die Grössen α, β, γ etc. als Constante und die dx, dy, dz als Variable betrachtet werden. Da nun die letzteren in keiner höheren Potenz als der zweiten vorkommen, so folgt, dass sich ein jedes Flächenelement durch eine Fläche zweiten Grades darstellen lässt.

Geht man zu dem besondern Coordinatensystem über, so fallen die mit p, q und w behafteten Glieder hinweg. Bezeichnet man ferner die Variabeln, wie es gebräuchlich ist, mit x, y, z und multiplicirt sämmtliche Glieder mit $\frac{2}{t}$, so kommt schliesslich

43) $$\frac{\alpha x^2}{t} + \frac{\beta y^2}{t} + \frac{\gamma z^2}{t} + \frac{2u}{t}yz + \frac{2v}{t}xz - 2z = 0.$$

Die Constanten α, β, u, v sind bekannte Grössen und lassen sich nach Ausweis der vorhergehenden Paragraphen durch Theile des Flächenelements ausdrücken. Nicht so verhält es sich mit dem Coefficienten von z^2. Die z ist in Hinsicht auf die anderen Variabeln x und y eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung, der Coefficient von z kann daher keinen Einfluss auf die Gestaltung des Flächenelements ausüben und tritt in keine der diesfallsigen analytischen Entwickelungen ein. Durch eine wiederholte Differentiation liesse sich zwar auch ein Ausdruck für den gedachten Coefficienten gewinnen, man überschritte aber dadurch, wenn die generelle Fläche nicht vom zweiten Grade ist, die Grenzen des Flächenelements.

Was hingegen die geometrische Bedeutung der Grösse γ betrifft, so ist es nicht schwierig, dieselbe zu ermitteln. Setzt man nämlich in der 43) x und $y=0$ und substituirt für γ den Ausdruck $1:s_1$, so kommt

$$\frac{z^2}{s_1} = 2z.$$

Daraus ist zu ersehen, dass die z-Axe zweimal durch die Fläche geschnitten wird, das eine Mal bei dem Werthe $z=0$, das andere Mal bei dem Werthe $z=2s_1$. Die Grösse $2s_1$ stellt demnach die Entfernung dieser beiden Schnittpunkte dar.

Führt man die s_1 in die 43) ein und setzt auch für α, β, u, v die entsprechenden Grössen des Flächenelements, so kommt schliesslich die Gleichung des Flächenelements in der Form

$$44) \qquad \frac{x^2}{\varrho_0} + \frac{y^2}{\varrho_1} + \frac{z^2}{s_1} - 2\varrho_0 \, d\varphi'_0 \, yz - 2\varrho_1 \, d\varphi'_1 \, xz - 2z = 0.$$

§ 9.

Es soll nun noch untersucht werden, wie sich die Flächenelemente durch geodätische Messungen, also durch Beobachtung der Polhöhen, Längen, Azimuthe und irgend einer linearen Grösse ermitteln lassen. Vor allen Dingen muss ein Dreiecksnetz vorhanden sein, dessen einzelne Seiten als Linienelemente betrachtet werden können. Zweitens müssen alle Punkte astronomisch bestimmt sein. Geht man nun von einem Netzpunkte aus und verbindet ihn mit allen benachbarten Punkten, so erhält man soviel Linienzweiecke, wie benachbarte Punkte vorhanden sind. Durch die Berechnung dieser Zweiecke werden die Winkel ∂ zwischen den benachbarten Normalen, sowie die sphärischen Correctionen bekannt. Die letzteren ergänzen im vorliegenden Falle die Winkel zwischen den conjugirten Tangenten zu 90^0, sie treten deshalb ebenso, wie die ersteren, unmittelbar in die Formeln des Flächenelements ein.

Am zweckmässigsten erscheint es nun, mittels der berechneten Grössen zuerst die Richtung der Hauptschnitte zu bestimmen. Man bedient sich hierzu der Gleichung 12a), indem man sie auf die Form bringt:

$$\frac{\partial' \cos\zeta}{2} = d \sin 2\varphi.$$

Der Ausdruck links des Gleichheitszeichens besteht aus bekannten Grössen; rechts hingegen hat man die zwei Unbekannten d und φ. Um dieselben zu ermitteln, stellt man die analogen Gleichungen für alle Zweiecke auf. Bezeichnet man die Winkel, welche die verschiedenen Richtungen 1, 2, 3 etc. mit der bestimmten Richtung 0 einschliessen, mit p_1, p_2, p_3 etc., so entstehen folgende Gleichungen:

$$45) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial'_0 \cos\zeta_0}{2} &= d \sin 2\varphi_0, \\ \frac{\partial'_1 \cos\zeta_1}{2} &= d \sin 2(p_1 + \varphi_0), \\ \frac{\partial'_2 \cos\zeta_2}{2} &= d \sin 2(p_2 + \varphi_0) \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen gehen in bekannter Weise die wahrscheinlichsten Werthe der Grössen d und φ hervor.

Nunmehr kann man zur Ermittelung der Krümmungsradien schreiten. Wendet man hierzu die 17) an, so geben die verschiedenen Zweiecke 1, 2, 3 etc. folgende Relationen:

$$\frac{\cos\varphi_1^2}{\varrho_0} + \frac{\sin\varphi_1^2}{\varrho_1} = \partial'_1 \sin\zeta_1,$$

46)
$$\frac{\cos\varphi_2^2}{\varrho_0} + \frac{\sin\varphi_2^2}{\varrho_1} = \partial'_2 \sin\zeta_2$$

. . . . . .

Die Winkel φ_1, φ_2 etc. sind durch die Berechnung der Gleichungen 45) bekannt geworden. Man hat es daher nur noch mit den zwei Unbekannten ϱ_0 und ϱ_1 zu thun, welche nach bekannten Regeln ermittelt werden können.

Eigentlich hätte man die 45) und 46) nicht getrennt berechnen dürfen, weil ϱ_0 und ϱ_1 in beiden Gleichungen vorkommt. Der Fehler, welcher durch die Anwendung dieser einfacheren Methode begangen wird, ist aber sehr gering und kann vernachlässigt werden.

Sind auf diese Weise für jeden Punkt des Dreiecksnetzes die Krümmungsradien und die Richtungen der Hauptschnitte ermittelt worden, so ist man nunmehr in den Stand gesetzt, schliesslich auch die Grössen u und v zu bestimmen. Aus den bekannten Richtungen der Hauptschnitte auf den verschiedenen Punkten lässt sich leicht die Torsion φ' ableiten. Betrachtet man nun wiederum einen Punkt als Centralpunkt, so liefert die 40) für die benachbarten Punkte folgende Gleichungen:

$$\varphi'_1 = \varphi'_0 \cos\varphi_1 + \varphi'_1 \sin\varphi_1,$$
$$\varphi'_2 = \varphi'_0 \cos\varphi_2 + \varphi'_1 \sin\varphi_2$$

. . . . . .

Daraus lassen sich die Grössen φ'_0 und φ'_1 und folglich auch die u und v ermitteln, und somit wäre das Flächenelement vollkommen bestimmt. — Die eben erörterte Methode löst zwar, vom theoretischen Standpunkte aus betrachtet, die Aufgabe der Flächenermittelung; sie kann auch praktisch verwerthet werden, wenn es sich darum handelt, einen kleinen Flächentheil ganz speciell kennen zu lernen; aber allgemeine Anwenduug findet sie nicht. Ein Element der Erdoberfläche umfasst ungefähr einen Raum von einigen Quadratmeilen. Auf diesem Raume müssen wenigstens vier astronomisch bestimmte Punkte vorhanden sein, wenn das Flächenelement berechnet werden soll. Wollte man nun einen beträchtlichen Theil der Erd oberfläche nach der erörterten Methode aufmessen, so würde dazu eine sehr grosse Anzahl von Dreieckspunkten nöthig sein; die Schwierigkeit der Arbeit würde sich in unangemessener Weise steigern, die Genauigkeit des Ganzen aber nicht gefördert werden. Im Allgemeinen ist also das erwähnte Verfahren nicht anwendbar. Man ist genöthigt, anstatt der Flächenelemente grössere Flächentheile einzuführen, und da diese immer noch annähernd als Flächen zweiten Grades betrachtet werden können, so kommt es nun darauf an, die Eigenschaften dieser Flächen, insbesondere des Ellipsoids, specieller zu untersuchen. Dies soll im nächsten Capitel geschehen.

Cap. III.
Das Ellipsoid.

A. Das Sphäroid.

§ 1.

Bezeichnet man die drei Halbaxen des Ellipsoids mit a, b, c und ferner drei noch unbekannte Functionen von zwei Variabelen mit f_1, f_2 und f_3, so lässt sich die Gleichung der gedachten Fläche in folgender Form darstellen:

1) $$x = af_1, \quad y = bf_2, \quad z = cf_3.$$

Setzt man diese Werthe von x, y, z in die gewöhnliche Flächengleichung

2) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

so erhält man eine Bedingungsgleichung für die Functionen f, nämlich

3) $$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 1.$$

Die Gleichungen 1) und 3) hat man nun zu differentiiren. Bezeichnet man die Derivationen von f_1, f_2 und f_3, welche partiell nach den beiden Variabelen genommen worden sind, beziehungsweise mit φ_1, φ_2, φ_3 und ψ_1, ψ_2, ψ_3, so ergiebt sich aus der partiellen Differentiation der 1):

$$x' = a\varphi_1, \quad y' = b\varphi_2, \quad z' = c\varphi_3,$$
$$x'_1 = a\psi_1, \quad y'_1 = b\psi_2, \quad z'_1 = c\psi_3.$$

Daraus lassen sich ohne Weiteres die Richtungsgrössen der Flächennormale pqr entnehmen; es kommt

3a) $$at_1 p = \varphi_2\psi_3 - \psi_2\varphi_3, \quad bt_1 q = \varphi_3\psi_1 - \psi_3\varphi_1, \quad ct_1 r = \varphi_1\psi_2 - \psi_1\varphi_2.$$

Nunmehr differentiirt man auch die 3) partiell und erhält

$$f_1\varphi_1 + f_2\varphi_2 + f_3\varphi_3 = 0,$$
$$f_1\psi_1 + f_2\psi_2 + f_3\psi_3 = 0.$$

Diese Gleichungen löst man nach f auf, wodurch folgende Relationen entstehen:

3b) $$f_1 t_2 = \varphi_2\psi_3 - \psi_2\varphi_3, \quad f_2 t_2 = \varphi_3\psi_1 - \psi_3\varphi_1, \quad f_3 t_2 = \varphi_1\psi_2 - \psi_1\varphi_2.$$

Vergleicht man die 3a) und 3b) mit einander, so erhält man schliesslich

$$f_1 = atp, \quad f_2 = btq, \quad f_3 = ctr.$$

Damit sind also die Functionen f gegeben. Substituirt man dieselben in die 1), so folgt die Flächengleichung

4) $$x = a^2 tp,$$
$$y = b^2 tq,$$
$$z = c^2 tr.$$

Als einzige Unbekannte tritt darin der gemeinschaftliche Factor t auf; für denselben ergiebt sich aber aus der 2) oder 3) sofort der Ausdruck

$$4a) \qquad t^2 = \frac{1}{a^2p^2 + b^2q^2 + c^2r^2}.$$

Die Gleichung 4) stellt die Coordinaten x, y, z als Functionen der Richtungsgrössen der Flächennormalen dar. Um eine bestimmte Lage der Normale anzugeben, hat man zwei Winkel nöthig. Wir wählen dazu die Länge λ und die Breite π. Die Breite repräsentirt den Winkel zwischen der Flächennormale und der XY-Ebene; unter der Länge versteht man denjenigen Winkel, welchen eine durch die Normale parallel zur Z-Axe gelegte Ebene mit der XZ-Ebene einschliesst. — Dies vorausgeschickt, ergeben sich nun für p, q, r folgende Werthe:

$$p = \cos\pi\cos\lambda, \quad q = \cos\pi\sin\lambda, \quad z = \sin\pi,$$

und die Gleichungen 4) gehen in folgende über:

$$51) \qquad \begin{cases} x = a^2t\,.\cos\pi\cos\lambda, \quad y = b^2t\,.\cos\pi\sin\lambda, \quad z = c^2t\,.\sin\pi, \\ t^2 = \dfrac{1}{a^2\cos\pi^2\cos\lambda^2 + b^2\cos\pi^2\sin\lambda^2 + c^2\sin\pi^2}. \end{cases}$$

Hat man es mit einem Rotationsellipsoid zu thun, so ist $b = a$; und führt man ferner die Excentricität $e^2 = \dfrac{a^2 - c^2}{a^2}$ ein, so resultirt die Flächengleichung

$$6) \qquad x = \frac{a\cos\pi\cos\lambda}{\sqrt{1 - e^2\sin\pi^2}}, \qquad y = \frac{a\cos\pi\sin\lambda}{\sqrt{1 - e^2\sin\pi^2}}, \qquad z = \frac{a(1-e^2)\sin\pi}{\sqrt{1 - e^2\sin\pi^2}}.$$

§ 2.

Wir betrachten zuerst und hauptsächlich das zweiaxige Ellipsoid und beginnen damit, zwei verschiedene Punkte auf dieser Fläche durch ein Linienzweieck zu verbinden und die einzelnen Theile dieser Figur durch Grössen des Sphäroids auszudrücken. Es müssen demnach entwickelt werden:

a) Die Richtung der Pollinie.

Giebt man den Normalen $p_1q_1r_1$ und $p_2q_2r_2$ die Werthe

$$p_1 = \cos\pi_1, \qquad q_1 = 0, \qquad r_1 = \sin\pi_1,$$
$$p_2 = \cos\pi_2\cos\lambda, \quad q_2 = \cos\pi_2\sin\lambda, \quad r_2 = \sin\pi_2,$$

und bezeichnet den Winkel zwischen beiden Richtungen mit ∂, so erhält man die Richtung $l\,m\,n$ der Pollinie durch die Ausdrücke

$$l = \frac{-\sin\pi_1\cos\pi_2\sin\lambda}{\sin\partial}, \qquad m = \frac{\sin\pi_1\cos\pi_2\cos\lambda - \cos\pi_1\sin\pi_2}{\sin\partial},$$

$$n = \frac{\cos\pi_2\cos\pi_1\sin\lambda}{\sin\partial}.$$

Führt man die sphärischen Azimuthe α_1 und α_2 ein, welche von Nord nach West oder Ost gerechnet werden, so lassen sich die vorigen Formeln nach bekannten Sätzen der Trigonometrie auf die Form bringen:

7) $$l = -\sin\pi_1 \sin\alpha_1, \quad m = -\cos\alpha_1, \quad n = \cos\pi_1 \sin\alpha_1.$$

b) Die Länge der Axe.

Für die Hauptkrümmungsradien des Sphäroids hat man bekanntlich die Ausdrücke

8) $$\varrho_1 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin\pi^2}}, \quad \varrho_0 = \frac{a(1-e^2)}{(1 - e^2 \sin\pi^2)^{3/2}}.$$

ϱ_0 bezeichnet den Krümmungsradius des Meridians, ϱ_1 hingegen den Radius des auf dieser Richtung senkrecht genommenen Schnittes. Der Endpunkt von ϱ_1 fällt in die Rotationsaxe; die Entfernung dieses Punktes vom Fusspunkte der x-Coordinate erhält man daher durch Projection des gedachten Radius auf die Axe, d. h. durch den Ausdruck $\varrho_1 \sin\pi_1$. Subtrahirt man von dieser Grösse die Coordinate z, so folgt die Entfernung des genannten Endpunktes vom Mittelpunkte des Sphäroids mittels des Ausdrucks

$$\varrho_1 \sin\pi_1 - z.$$

Derselbe kann mit Berücksichtigung der 6) leicht auf die Form gebracht werden:

$$\varrho_1 \sin\pi_1 \cdot e^2.$$

Für die entsprechende Grösse des zweiten Punktes erhält man, sobald der betreffende Krümmungsradius mit ϱ_2 bezeichnet wird:

$$\varrho_2 \sin_2 \pi_2 \cdot e^2.$$

Die Differenz beider Grössen bildet die Länge l der Axe; es folgt daher schliesslich:

9) $$l = e^2 (\varrho_1 \sin\pi_1 - \varrho_2 \sin\pi_2).$$

c) Der kürzeste Abstand.

Man erhält diese Grösse unmittelbar aus der Gleichung IX) des ersten Capitels. Setzt man nämlich darin für l den Werth aus der vorigen Gleichung, so kommt

10) $$k = e^2 \cos\pi_1 \sin\alpha_1 (\varrho_1 \sin\pi_1 - \varrho_2 \sin\pi_2).$$

Um diesen Ausdruck weiter zu entwickeln, substituirt man zuerst für ϱ_1 und ϱ_2 die Werthe aus der 8), wodurch man erhält

$$k = a \cdot e^2 \cdot \cos\pi_1 \sin\alpha_1 \left(\frac{\sin\pi_1}{\sqrt{1 - e^2 \sin\pi_1^2}} - \frac{\sin\pi_2}{\sqrt{1 - e^2 \sin\pi_2^2}} \right).$$

Wird nun das erste Glied unter der Klammer vorgenommen, so kommt man auf die Reihe

$$\frac{\sin\pi_1}{\sqrt{1 - e^2 \sin\pi_1^2}} = \sin\pi_1 \left(1 + \frac{e^2}{2} \sin\pi_1^2 + \frac{3}{8} e^4 \sin\pi_1^4 + \frac{5}{16} e^6 \sin\pi_1^6 + \ldots\right).$$

Für die Potenzen der Sinus existiren bekanntlich die Ausdrücke

$$\sin\pi^3 = \tfrac{3}{4}\sin\pi - \tfrac{1}{4}\sin 3\pi,$$
$$\sin\pi^5 = \tfrac{5}{8}\sin\pi - \tfrac{5}{16}\sin 3\pi + \tfrac{1}{16}\sin 5\pi,$$
$$\sin\pi^7 = \tfrac{35}{64}\sin\pi - \tfrac{21}{64}\sin 3\pi + \tfrac{7}{64}\sin 5\pi - \tfrac{1}{64}\sin 7\pi.$$

Setzt man diese oben ein und wendet folgende Abkürzungen an:

$$A = 1 + \tfrac{3}{8}e^2 + \tfrac{15}{64}e^4 + \tfrac{175}{1024}e^6,$$
$$B = \frac{e^2}{8} + \tfrac{15}{128}\cdot e^4 + \tfrac{105}{1024}e^6,$$
$$C = \tfrac{3}{128}e^4 + \tfrac{35}{1024}e^6,$$
$$D = \tfrac{5}{1024}e^6,$$

so geht die Reihe in folgende über:

$$\frac{\sin\pi_1}{\sqrt{1 - e^2\sin\pi_1^2}} = A\sin\pi_1 - B\sin 3\pi_1 + C\sin 5\pi_1 - D\sin 7\pi_1.$$

Einen analogen Ausdruck liefert in der Gleichung für k das zweite Glied unter der Klammer, nämlich

$$\frac{\sin\pi_2}{\sqrt{1 - e^2\sin\pi_2^2}} = A\sin\pi_2 - B\sin 3\pi_2 + C\sin 5\pi_2 - D\sin 7\pi_2.$$

Subtrahirt man beide von einander, verbindet die zusammengehörigen Glieder und setzt dann den Ausdruck oben ein, so kommt schliesslich

$$k = 2.a.e^2\cos\pi_1\sin\alpha_1\left[A\sin\frac{\pi_1-\pi_2}{2}\cos\frac{\pi_1+\pi_2}{2}\right.$$
$$- B\sin 3\frac{(\pi_1-\pi_2)}{2}\cos 3\frac{(\pi_1+\pi_2)}{2}$$
$$\left. + C\sin 5\frac{(\pi_1-\pi_2)}{2}\cos 5\frac{\pi_1+\pi_2}{2}\right]. \qquad 10\,a)$$

Daraus ist zu ersehen, dass k in Bezug auf die Halbaxe a oder den Krümmungsradius ϱ unter allen Umständen eine kleine Grösse ist.

d) Die Entfernungen r_1 und r_2 vom Pole des Linienzweiecks bis zu den Flächenpunkten.

In der Gleichung III), Capitel I, hat man die Ausdrücke für h_1 und h_2, durch welche die Kantenstrecken vom Pole des Zweiecks bis zur Axe gegeben sind. Subtrahirt man die absoluten Werthe dieser Grössen von denen der Krümmungsradien, so erhält man die gesuchten Grössen r_1 und r_2. Es folgen daher die Gleichungen

$$r_1 = \varrho_1 - \frac{k}{\sin\partial\ tg\,\alpha_2}, \quad r_2 = \varrho_2 + \frac{k}{\sin\partial\ tg\,\alpha_1}. \qquad 11)$$

e) Die sphärische Correction.

Nunmehr kann man zur Ermittelung der wichtigsten Grösse des Linienzweiecks, nämlich der sphärischen Correction, schreiten. Aus den 16), Capitel I, folgen die Relationen

$$cotg\, w_1 = \frac{r_2 \sin\partial}{k}, \quad cotg\, w_2 = \frac{r_1 \sin\partial}{k}.$$

Substituirt man für r die Werthe aus den 11), so kommt

$$tg\, w_1 = \frac{k}{\varrho_2 \sin\partial + k\, cotg\, \alpha_1}, \quad tg\, w_2 = \frac{k}{\varrho_1 \sin\partial - k\, cotg\, \alpha_2}.$$

Es ist schon darauf hingewiesen worden, dass k in Hinsicht auf den Krümmungsradius eine kleine Grösse ist. Man kann daher die vorstehenden Ausdrücke in schnell convergirende Reihen umwandeln und erhält auf diese Weise

$$tg\, w_1 = \frac{k}{\varrho_2 \sin\partial} - \frac{k^2 cotg\, \alpha_1}{\varrho_2^2 \sin\partial^2} + \frac{k^3 cotg\, \alpha_1^2}{\varrho_2^3 \sin\partial^3},$$
$$tg\, w_2 = \frac{k}{\varrho_1 \sin\partial} + \frac{k^2 cotg\, \alpha_2}{\varrho_1^2 \sin\partial^2} + \frac{k^3 cotg\, \alpha_2^2}{\varrho_1^3 \sin\partial^3}.$$

Das Vorzeichen von k hängt von dem der Polhöhendifferenz $\pi_2 - \pi_1$ ab. Stellt man fest, dass in diesem Ausdrucke stets diejenige Polhöhe, für welche die sphärische Correction berechnet werden soll, vornweg gesetzt wird, so hat man in der zweiten der vorigen Gleichungen das Vorzeichen von k zu ändern. Aendert man ebenso das Vorzeichen von w_2 und deutet durch die Indices 12) und 21) die Differenzen $\pi_1 - \pi_2$ und $\pi_2 - \pi_1$ an, so folgt schliesslich

12)
$$tg\, w_1 = \frac{k_{12}}{\varrho_2 \sin\partial} - \frac{k^2_{12}}{\varrho_2^2 \sin\partial^2} \cdot cotg\, \alpha_1 + \frac{k^3_{12}}{\varrho_2^3 \sin\partial^3} \cdot cotg\, \alpha_1^2,$$
$$tg\, w_2 = \frac{k_{21}}{\varrho_1 \sin\partial} - \frac{k^2_{21}}{\varrho_1^2 \sin\partial^2} \cdot cotg\, \alpha_2 + \frac{k^3_{21}}{\varrho_1^3 \sin\partial^3} \cdot cotg\, \alpha_2^2.$$

Damit sind die beiden Gleichungen auf eine ähnliche Form gebracht, und für beide Werthe der so ermittelten sphärischen Correction gilt die Relation

$$\alpha - a = w.$$

Will man die Formeln 12) zur Berechnung anwenden, so hat man zuvor die Grösse k aus der 10) zu ermitteln und dann hier einzusetzen. Man kann diese Formeln aber auch so umgestalten, dass aus ihnen die sphärische Correction unmittelbar hervorgeht. Substituirt man nämlich für k den Werth aus der 10), so folgt

$$\frac{k_{12}}{\varrho_2 \sin\partial} = \frac{e^2 \cos\pi \sin\alpha}{\sin\partial} \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2} \sin\pi_1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_2} \sin\pi_2 \right),$$
$$\frac{k_{21}}{\varrho_1 \sin\partial} = \frac{e^2 \cos\pi \sin\alpha}{\sin\partial} \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1} \sin\pi_2 - \frac{\varrho_1}{\varrho_1} \sin\pi_1 \right).$$

Entwickelt man die erste Gleichung weiter, indem man für ϱ_1 und ϱ_2 die Ausdrücke der 8) einsetzt und dann zur Reihe übergeht, so erhält man

$$\frac{\sin\pi_1\sqrt{1-e^2\sin\pi_2^2}}{\sqrt{1-e^2\sin\pi_1^2}} - \sin\pi_2$$

$$= \sin\pi_1\left(1-\frac{e^2}{2}\sin\pi_2^2 - \tfrac{1}{8}\,e^4\sin\pi_2^4\right)\left(1+\frac{e^2}{2}\sin\pi_1^2 + \tfrac{3}{8}\,e^4\sin\pi_1^4\right) - \sin\pi_2$$

$$= \sin\pi_1\left(1-\frac{e^2}{2}\sin\pi_2^2 - \tfrac{1}{8}\,e^4\sin\pi_2^4 + \frac{e^2}{2}\sin\pi_1^2 - \frac{e^4}{4}\sin\pi_1^2\sin\pi_2^2 + \tfrac{3}{8}\,e^4\sin\pi_1^4\right) - \sin\pi_2$$

$$= \sin\pi_1 - \sin\pi_2 + \frac{e^2}{2}\sin\pi_1(\sin\pi_1^2 - \sin\pi_2^2) + \frac{e^4}{8}\sin\pi_1(\sin\pi_1^4 - \sin\pi_2^4) + \frac{e^4}{4}\sin\pi_1^3(\sin\pi_1^2 - \sin\pi_2^2)$$

$$= (\sin\pi_1 - \sin\pi_2)\left[1+\frac{e^2}{2}\sin\pi_1(\sin\pi_1+\sin\pi_2) + \frac{e^4}{8}\sin\pi_1(\sin\pi_1^2+\sin\pi_2^2)(\sin\pi_1+\sin\pi_2) + \frac{e^4}{4}\sin\pi_1^3(\sin\pi_1+\sin\pi_2)\right]$$

$$= (\sin\pi_1 - \sin\pi_2)\left[1+(\sin\pi_1+\sin\pi_2)\left(\frac{e^2}{2}\sin\pi_1 + \frac{e^4}{8}\sin\pi_1(3\sin\pi_1^2+\sin\pi_2^2)\right)\right]$$

$$= 2\sin\frac{\pi_1-\pi_2}{2}\cos\frac{\pi_1+\pi_2}{2}\left[1+\sin\frac{\pi_1+\pi_2}{2}\cos\frac{\pi_1-\pi_2}{2}\left(e^2\sin\pi_1 + \frac{e^4}{4}\sin\pi_1(3\sin\pi_1^2+\sin\pi_2^2)\right)\right].$$

Setzt man zur Abkürzung

13)
$$\begin{cases} m_{12} = \dfrac{2\,e^2\cos\pi_1\sin\alpha_1}{\sin\partial}\sin\dfrac{\pi_1-\pi_2}{2}\cos\dfrac{\pi_1+\pi_2}{2} \\ \quad = \dfrac{2.e^2\sin\alpha_1\sin\alpha_2}{\sin\lambda}\sin\dfrac{\pi_1-\pi_2}{2}\cos\dfrac{\pi_1+\pi_2}{2}, \\ n = \sin\dfrac{\pi_1+\pi_2}{2}\cos\dfrac{\pi_1-\pi_2}{2}, \end{cases}$$

so erhält man schliesslich

$$\frac{k_{12}}{\varrho_2\sin\partial} = m_{12}\left[1+n\left(e^2\sin\pi_1 + \frac{e^4}{4}\sin\pi_1(3\sin\pi_1^2+\sin\pi_2^2)\right)\right].$$

Führt man diesen Ausdruck ein und ordnet die Glieder nach ihrer Grösse, so geht die 12) in folgende Gleichung über:

$$14)\quad \begin{cases} tg\, w_1 = m_{12} - m^2_{12}\, cotg\, \alpha_1 + e^2 . n m_{12} . \sin \pi_1 \\ \qquad + \frac{e^4}{4} . n m_{12} \sin \pi_1 (3 \sin \pi_1{}^2 + \sin \pi_2{}^2) \\ \qquad - 2 n m^2_{12} . e^2 . \sin \pi_1\, cotg\, \alpha_1 + m^3_{12}\, cotg\, \alpha_1{}^2. \end{cases}$$

Durch Vertauschung der Indices erhält man ferner

$$\begin{cases} tg\, w_2 = m_{21} - m^2_{21}\, cotg\, \alpha_2 + e^2 n m_{21} \sin \pi_2 \\ \qquad + \frac{e^4}{4} . n m_{21} \sin \pi_2 (3 \sin \pi_2{}^2 + \sin \pi_1{}^2) \\ \qquad - 2 e^2 . n m^2_{21} \sin \pi_2\, cotg\, \alpha_2 + m^3_{21}\, cotg\, \alpha^2{}_2. \end{cases}$$

Der Maximalwerth von m kann annähernd $= \frac{e^2 \cos \pi^2}{2}$ gesetzt werden. Untersucht man damit die drei letzten Glieder, so findet sich, dass ihr Betrag im Allgemeinen kleiner als 0,01″ ist und nur in dem besondern Falle bis zu dieser Grösse heranwachsen kann, wenn das Azimuth nahe $= 45^0$ ist. Wird daher nicht die grösste Genauigkeit gefordert, so reicht man mit den drei ersten Gliedern aus. Eine andere Abkürzung der Formeln ist die, dass man die Tangente von w mit dem Bogen vertauscht. Der Fehler, welcher dadurch entsteht, beträgt nur wenige Tausendtheile einer Secunde.

§ 3.

Es ist von Interesse, zu untersuchen, wie gross der Unterschied zwischen den sphärischen Correctionen w_1 und w_2 sei. Aus dem Zeichenwechsel, der im vorigen Paragraphen mit der Grösse w_2 vorgenommen wurde, folgt, dass man, um die gedachte Differenz zu finden, die Gleichungen 14) nicht zu subtrahiren, sondern zu addiren hat. Bezeichnet man die Differenz mit D, führt die Addition aus und vernachlässigt die drei letzten Glieder, so folgt die Gleichung

$$D = e^2 n m (\sin \pi_1 - \sin \pi_2) - m^2 (cotg\, \alpha_1 + cotg\, \alpha_2).$$

Die Summe S der beiden Cotangenten ist nun besonders zu entwickeln. Multiplicirt und dividirt man dieselbe beziehungsweise mit $\cos \pi_1 \sin \alpha_1$ und $\cos \pi_2 \sin \alpha_2$, so erhält man

$$S . \cos \pi \sin \alpha = \cos \pi_1 \cos \alpha_1 + \cos \pi_2 \cos \alpha_2.$$

Nach bekannten sphärischen Formeln ist aber

$$\cos \pi_1 \cos \alpha_1 = \frac{\sin \pi_2 - \sin \pi_1 \cos \partial}{\sin \partial},$$

$$\cos \pi_2 \cos \alpha_2 = \frac{\sin \pi_1 - \sin \pi_2 \cos \partial}{\sin \partial}.$$

Addirt man beide Gleichungen, so kommt

$$\cos \pi_1 \cos \alpha_1 + \cos \pi_2 \cos \alpha_2 = (\sin \pi_1 + \sin \pi_2)\, tg \frac{\partial}{2} = 2 . n . tg \frac{\partial}{2}.$$

Setzt man dies ein, so geht die Gleichung für D in folgende über:

$$D = e^2 n.m.(\sin\pi_1 - \sin\pi_2) - \frac{2n.m^2}{\cos\pi\sin\alpha} tg\frac{\partial}{2}$$

$$= \frac{n.m}{\cos\pi\sin\alpha}\left(\frac{2.e^2\cos\pi\sin\alpha\sin\frac{\pi_1-\pi_2}{2}\cos\frac{\pi_1+\pi_2}{2}\sin\partial - 2m.tg\frac{\partial}{2}}{\sin\partial}\right)$$

$$= \frac{2.n.m^2}{\cos\pi\sin\alpha}\left(\sin\frac{\partial}{2}\cos\frac{\partial}{2} - tg\frac{\partial}{2}\right) = -\frac{2.n.m^2}{\cos\pi\sin\alpha}\sin\frac{\partial^2}{2}tg\frac{\partial}{2}.$$

Substituirt man für m und n die Werthe aus den 13), so kommt schliesslich

15) $$D = -\frac{e^4\cos\pi\sin\alpha}{\sin\partial}.\sin\frac{\pi_1-\pi_2}{2}\cos\frac{\pi_1+\pi_2}{2}\sin(\pi_1-\pi_2)\sin(\pi_1+\pi_2)tg\frac{\partial^2}{2}.$$

Aus dieser Gleichung erhellt, dass die Differenz der sphärischen Correctionen w_1 und w_2 eine sehr kleine Grösse ist. Sie beträgt z. B. bei einer Entfernung von 200 Meilen noch nicht den hundertsten Theil einer Secunde. Daher folgt das für die Praxis wichtige Resultat, dass die Dreiecke auf dem Erdsphäroid, wenn sie die angegebene Grösse nicht überschreiten, wie geschlossene Dreiecke behandelt werden können.

§ 4.

Bevor wir weiter gehen, soll die Anwendung der entwickelten Formeln an einem Beispiele erläutert werden. Es sei

$$\pi_1 = 52^0\,30'\,16{,}7'', \quad \pi_2 = 54^0\,42'\,50{,}6'', \quad \lambda = 7^0\,6'.$$

Rechnet man nach den sphärischen Formeln

$$tg\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2} = \frac{\cos\frac{\pi_2-\pi_1}{2}}{\sin\frac{\pi_1+\pi_2}{2}\,tg\frac{\lambda}{2}}; \quad tg\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2} = \frac{\sin\frac{\pi_2-\pi_1}{2}}{\cos\frac{\pi_2+\pi_1}{2}\,tg\frac{\lambda}{2}},$$

so folgt

$\frac{\pi_2-\pi_1}{2} = 1^0\ 6'\ 16{,}95''$	$\log\sin = 8{,}2850982$	$\log\cos = 9{,}9999193$
$\frac{\pi_2+\pi_1}{2} = 53^0\,36'\,33{,}65''$	$\log\cos = 9{,}7732653$	$\log\sin = 9{,}9057908$
$\frac{\lambda}{2} = 3^0\,33'$ —	$\log tg = 8{,}7926620$	$\log tg = 8{,}7926620$
	$-\ 8{,}5659273$	$-\ 8{,}6984528$
	$\log tg\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2} = 9{,}7191709$	$\log tg\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2} = 11{,}3014660.$

Daraus erhält man die Winkel

$$\left.\begin{aligned}\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2} &= 87^0\ 8'\ 25{,}68''\\ \frac{\alpha_2-\alpha_1}{2} &= 27^0\ 38'\ 45{,}03''\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}\alpha_2 &= 114^0\ 47'\ 10{,}71''\\ \alpha_1 &= 59^0\ 29'\ 40{,}65''.\end{aligned}$$

Schreitet man nun zur Berechnung der sphärischen Correction und schreibt die einzelnen Glieder in der Reihenfolge, wie sie die Formel 14) zeigt, so kommt

$$\begin{aligned}log\,2 &= 0{,}3010300\\ log\,e^2 &= 7{,}8244104\\ sin\frac{\pi_2-\pi_1}{2} &= 8{,}2850982\\ cos\frac{\pi_2+\pi_1}{2} &= 9{,}7732653\\ sin\,\alpha_1 &= 9{,}9352963\\ sin\,\alpha_2 &= 9{,}9580274\\ \hline &\quad 6{,}0771276\\ sin\,\lambda &= 9{,}0920237\\ \hline -m_{12} &= 6{,}9851039\\ sin\,1'' &= 4{,}6855749\\ \hline n.log\ 2{,}2995290 &= -199{,}31''.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m^2_{12} &= 3{,}97021\\ colg\,\alpha_1 &= 9{,}77024\\ \hline &\quad -3{,}74045\\ sin\,1'' &= 4{,}68557\\ \hline n\,log\ 0{,}05488 - 1\\ -0{,}1134''\end{aligned}\qquad\begin{aligned}e^2 &= 7{,}82441\\ m_{12} &= 6{,}98510\\ n &= 9{,}99992\\ &\quad 0{,}90579\\ sin\,\pi_1 &= 9{,}89949\\ \hline &\quad -4{,}61471\\ sin\,1'' &= 4{,}68557\\ \hline n\,log\ 0{,}92914 - 1\\ -0{,}8494''\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e^2\,n\,m_{12}\,sin\,\pi_1 &= 4{,}615\\ e^2 &= 7{,}824\\ log\ 0{,}63 &= 9{,}799\\ \hline &\quad -2{,}238\\ sin\,1'' &= 4{,}686\\ \hline 0{,}552 - 3\\ -0{,}0035''\end{aligned}\qquad\begin{aligned}e^2\,n\,m_{12}\,sin\,\pi_1 &= 4{,}615\\ 2 &= 0{,}301\\ m_{12} &= 6{,}985\\ colg\,\alpha_1 &= 9{,}770\\ \hline &\quad -1{,}671\\ sin\,1'' &\ 4{,}686\\ \hline 0{,}985 - 4\\ -0{,}00096''\end{aligned}\qquad\begin{aligned}m^3_{12} &= 0{,}955\\ colg\,\alpha_1{}^2 &= 9{,}540\\ \hline &\quad -0{,}495\\ sin\,1''\ 4{,}686\\ \hline 0{,}809 - 5\\ -0{,}000064''.\end{aligned}$$

Es wurden mit Absicht alle sechs Glieder berechnet, um daraus den Einfluss zu erkennen, den sie auf das Resultat ausüben. Man sieht, dass die letzten derselben von geringer Bedeutung sind. Addirt man die vier ersten, so folgt

1) 199,31
2) 0,113
3) 0,849
4) 0,004

$-w_1 = 200{,}276 = 3' 20{,}276''.$

Es war

$$\alpha_1 = 59^0\,29'\,40{,}65''$$
$$-w_1 = \quad 3'\,20{,}276$$

Daher kommt $\alpha_1 = 59^0\,33'\,0{,}926''.$

Damit sind nun auch zugleich die Grössen w_2 und α_2 am zweiten Punkte gegeben; denn bei Linien, die nicht grösser sind, als die des vorliegenden Falles, ist es gestattet, die beiden sphärischen Correctionen einander gleich zu setzen. Man kann sich davon durch die Berechnung der Grösse w_2 überzeugen. Da $m_{12} = -m_{21}$ ist, so kommt

$$w_2 = 199{,}31''$$

$+ m^2_{21} = 3{,}97021$	$+ e^2 n . m_{21} = 4{,}71521$	$+ e^2 n . m_{21} \sin\pi_2 = 4{,}627$
$\cot g\,\alpha_2 = 9{,}66434$	$\sin\pi_2 = 9{,}91184$	$e^2 = 7{,}824$
3,63455	4,62705	$0{,}66 = 9{,}826$
$\sin 1'' \; 4{,}68557$	$\sin 1'' = 4{,}68557$	2,277
$0{,}94898 - 2$	$0{,}94148 - 1$	$\sin 1'' = 4{,}686$
$0{,}0889''$	$0{,}8739''$	$0{,}591 - 3$
		$0{,}0039''.$

Es folgt daher

1) 199,31
2) 0,0889
3) 0,8739
4) 0,0039

$w_2 = 200{,}277 = 3' 20{,}277'.$

Die Differenz $w_2 - w_1$ beträgt demnach nur $0{,}001''$; sie würde sich noch geringer herausgestellt haben, wenn auch die übrigen Glieder berücksichtigt worden wären. Das Azimuth α_2 folgt dann durch die Subtraction

$$\alpha_2 = 114^0\,47'\,10{,}71''$$
$$-w_2 = \quad -3'\,20{,}277''$$
$$\alpha_2 = 114^0\,43'\,50{,}433''.$$

§ 5.

Centrale und Centralschnitt.

Im § 8 des II. Capitels wurde die Gleichung einer Fläche zweiten Grades in folgender Form dargestellt:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2\,u\,y\,z + 2\,v\,x\,z - 2\,z = 0.$$

Entwickelt man aus dieser Gleichung das eine Mal die Variabele x, das andere Mal die y, so erhält man die Ausdrücke

$$x = -\frac{v.z}{\alpha} \pm \sqrt{P}, \quad y = -\frac{u.z}{\beta} \pm \sqrt{R}.$$

Jede der beiden Coordinaten hat zwei Werthe, welche den Endpunkten einer Sehne entsprechen. Addirt man diese Werthe und dividirt durch 2, so erhält man die Coordinaten des Mittelpunktes der Sehne, nämlich

$$\xi = -\frac{v.z}{\alpha}, \quad \eta = -\frac{u.z}{\beta}.$$

Denkt man sich z variabel, so stellen die vorigen Gleichungen den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Sehnen vor, welche auf der z-Axe senkrecht stehen, oder, was dasselbe heisst, sie repräsentiren die Gleichung eines Durchmessers. Dividirt man dieselben durch einander, so drückt der Quotient

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{u.\alpha}{v.\beta}$$

die Tangente des Winkels aus, welchen die Projection des Durchmessers mit der x-Axe bildet. Vergleicht man diese Formel mit der Formel 38) in Cap. II, welche sich auf die Richtung der Centrale bezieht, so findet man zwischen beiden vollkommene Uebereinstimmung. Es folgt daher, dass die Centrale der Flächen zweiten Grades identisch ist mit dem Durchmesser dieser Flächen. Differentiirt man die eingangs des Paragraphen aufgestellte Flächengleichung und setzt für $x'y'z'$ die constante Tangente abc, so erhält man

$$\alpha a x + \beta b y + (ub + va)\, z = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Ebene, welche in Verbindung mit der Flächengleichung eine einfach gekrümmte Curve repräsentirt. Substituirt man für x und y die Coordinaten ξ und η der Sehnenmittelpunkte, so wird die Gleichung identisch $=0$. Daraus ist ersichtlich, dass die Ebene der gedachten Curve den Durchmesser oder auch die Centrale der Fläche schneidet.

Wir wollen deshalb diese Curve mit dem Namen „Centralschnitt" bezeichnen und die constante Tangente abc die dirigirende Tangente des Centralschnitts nennen. Die letztere bildet die conjugirte Tangente zur Richtung des Curvenelements. Der Centralschnitt ist eine Rolllinie, wie aus der Ableitung desselben hervorgeht.

§ 6.

Winkel zwischen der Centrale und Normale am Sphäroid.

Man hat die Richtungen

$$p = \cos\pi, \quad q = 0, \quad r = \sin\pi,$$
$$f = \frac{a^2 \cos\pi}{t}, \quad g = 0, \quad h = \frac{c^2 \sin\pi}{t}.$$

Daraus folgt der Winkel ε zwischen beiden Linien durch die Gleichung

$$\cos\varepsilon = \frac{a^2\cos\pi^2 + c^2\sin\pi^2}{t} = \frac{a^2(1-e^2\sin\pi^2)}{t}.$$

Mittels derselben kann man auch den Sinu von ε entwickeln:

$$\sin\varepsilon = \sqrt{1-\cos\varepsilon^2}$$
$$= \frac{1}{t}\sqrt{a^4\cos\pi^2 + c^4\sin\pi^2 - a^4\cos\pi^4 - c^4\sin\pi^4 - 2a^2c^2\cos\pi^2\sin\pi^2}$$
$$= \frac{(a^2-c^2)\cos\pi\sin\pi}{t}.$$

Dividirt man beide Gleichungen durch einander, so kommt schliesslich

15) $$tg\,\varepsilon = \frac{e^2\cos\pi\sin\pi}{1-e^2\sin\pi^2}$$

oder, wenn man diesen Ausdruck in eine Reihe umwandelt:

15a) $$tg\,\varepsilon = e^2\cos\pi\sin\pi + e^4\cos\pi\sin\pi^3 + e^6\cos\pi\sin\pi^5.$$

§ 7.

Winkel zwischen dem Normal- und Centralschnitt.

Bezeichnet man die Azimuthe des Normal- und Centralschnitts, sowie das sphärische Azimuth beziehungsweise mit a, φ und α, den Höhenwinkel, d. i. der Winkel, welchen die Sehne mit der Tangentialebene bildet, mit q, den Winkel zwischen der Normale und Centrale mit ε, so hat man in Bezug auf das schon häufig angewandte Coordinatensystem, welches die Tangentialebene zur XY-Ebene und die Normale zur Z-Axe hat, folgende Richtungen:

1.	der Tangente des Normalschnitts . .	$\cos a$	$\sin a$	0;
2.	„ „ „ Centralschnitts . .	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	0;
3.	„ Normale	0	0	1;
4.	„ Centrale	$\sin\varepsilon$	0	$\cos\varepsilon$;
5.	„ Sehne	$\cos a\cos q$	$\sin a\cos q$	$\sin q$;
6.	„ Tangente des sphärischen Azimuths	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	0;
7.	„ dirigirenden Tangente	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	0;
8.	„ Axe	$\cos\pi$	0	$-\sin\pi$.

Man bestimmt nun zuerst die Richtung, welche auf dem Centralschnitt senkrecht steht. Es lässt sich dazu die Centrale und die Sehne oder auch die Centrale und die Tangente des Schnitts verwenden. Bezeichnet man die gesuchten Richtungsgrössen vorübergehend mit l, m, n, so erhält man demnach die folgenden Gleichungen:

$$l = -\frac{\sin a\cos q\cos\varepsilon}{t}, \quad m = \frac{\cos a\cos q\cos\varepsilon - \sin q\sin\varepsilon}{t}, \quad n = \frac{\sin a\cos q\sin\varepsilon}{t},$$

$$l = \frac{\sin\varphi\cos\varepsilon}{t}, \quad m = -\frac{\cos\varphi\cos\varepsilon}{t}, \quad n = -\frac{\sin\varphi\sin\varepsilon}{t}.$$

Aus diesen Ausdrücken lässt sich leicht eine Relation zwischen a und φ ableiten, denn man findet ohne Weiteres

16) $$\frac{-l}{m} = tg\,\varphi = \frac{sin\,a}{cos\,a - tg\,q\ tg\,\varepsilon}.$$

Weiter entwickelt, giebt diese Gleichung Folgendes:

$$cotg\,\varphi - cotg\,a = \frac{cos\,\varphi\ sin\,a - sin\,\varphi\ cos\,a}{sin\,\varphi\ sin\,a} = \frac{sin\,(a-\varphi)}{sin\,\varphi\ sin\,a} = \frac{tg\,q\ tg\,\varepsilon}{sin\,a},$$

und schliesslich kommt

17) $$sin\,(\varphi - a) = sin\,\varphi\ tg\,q\ tg\,\varepsilon.$$

Die Grösse ε ist kleiner als $\frac{e^2}{2}$, daher kann man in der Praxis, so lange der Winkel q den Werth 45^0 nicht überschreitet, den Sinus von $\varphi - a$ mit dem Bogen vertauschen. Nach der Formel 24), Cap. I, ist aber q nahe gleich $\frac{\partial}{2}$. Der angedeutete Fall tritt also erst dann ein, wenn die Länge des Centralschnitts über den Quadranten hinausgeht.

Sobald das Azimuth des Normalschnitts gegeben ist, lässt sich $\varphi - a$ nicht direct aus der 17) entnehmen. Man entwickelt daher weiter

$$\varphi - a = sin\,(a + \varphi - a)\ tg\,q\ tg\,\varepsilon = [sin\,a\ cos\,(\varphi - a) + cos\,a\ sin\,(\varphi - a)]\ tg\,q\ tg\,\varepsilon$$
$$= [sin\,a + cos\,a\ (\varphi - a)]\ tg\,q\ tg\,\varepsilon,$$

und erhält schliesslich

18) $$\varphi - a = sin\,a\ tg\,q\ tg\,\varepsilon + sin\,a\ cos\,a\ tg\,q^2\ tg\,\varepsilon^2.$$

Hat man es nur mit einer Länge von 10 bis 15 Meilen zu thun, so kann man das zweite Glied dieser Formel schwinden lassen.

§ 8.

Eine andere Ermittelung der sphärischen Correction.

Im Gegensatze zu der Entwickelung des § 2*e* leiten wir jetzt die sphärische Correction nicht aus den astronomischen Coordinaten beider Punkte, sondern aus der Polhöhe, dem Azimuth und dem Höhenwinkel des Anfangspunktes ab. Ihrer Definition gemäss ist die zu ermittelnde Grösse durch die Differenz zwischen dem sphärischen und geodätischen Azimuthe, also durch die Gleichung $w = \alpha - a$ gegeben. Durch Einführung des Central schnitts lässt sich diese Winkeldifferenz in die zwei folgenden zerlegen:

$$w = (\alpha - \varphi) + (\varphi - a).$$

Die eine Grösse, $\varphi - a$, ist bereits im vorigen Paragraphen ermittelt worden; es bleibt daher nur noch übrig, die andere zu bestimmen. Will man dazu einen geschlossenen Ausdruck haben, so kann man sich der Gleichung 12b), Cap. II, nämlich der folgenden:

$$tg\,\psi\ tg\,(\psi + \zeta) = -\frac{\varrho_1}{\varrho_0}$$

bedienen. Substituirt man für ζ den Winkel $90-\eta$ und führt das sphärische Azimuth mittels der Relation $\alpha - 90 = \psi$ ein, so nimmt die 12b) die Gestalt an:

$$tg(\alpha-90)\, tg(\alpha-\eta) = -\frac{\varrho_1}{\varrho_0},$$

die man nochmals umformen kann, wie folgt:

19) $$tg(\alpha-\eta) = \frac{\varrho_1}{\varrho_0}\, tg\,\alpha.$$

Hat man mittels dieser Gleichung den Winkel η bestimmt, so erhält man die sphärische Correction durch

20) $$w = \alpha - a = \varphi - a + \eta.$$

Es ist aber vorzuziehen, zur Berechnung des Winkels η nicht die 19) anzuwenden, sondern sich dabei einer Reihe zu bedienen. Aus der Gleichung 12), Cap. II, hat man

$$cos\,\zeta = \frac{d\, cos\,\varphi\, sin\,\varphi}{\sqrt{\frac{cos\,\varphi^2}{\varrho_0^2} + \frac{sin\,\varphi^2}{\varrho_1^2}}}.$$

Betrachtet man den Winkel φ als das Azimuth des Centralschnitts, führt die Grösse η ein und entwickelt weiter, so kommt

$$-sin\,\eta = \frac{d\, cos\,\varphi\, sin\,\varphi}{\sqrt{\frac{cos\,\varphi^2}{\varrho_0^2} + \frac{sin\,\varphi^2}{\varrho_1^2}}} = \frac{\varrho_1 d\,.\, cos\,\varphi\, sin\,\varphi}{\sqrt{1+\varrho_1^2 \sigma d\,.\, cos\,\varphi^2}}$$

$$= \varrho_1\, d\, cos\,\varphi\, sin\,\varphi \left(1 - \frac{\varrho_1^2 \sigma d}{2}\, cos\,\varphi^2 + \tfrac{3}{8}\varrho_1^4 \sigma^2 d^2\, cos\,\varphi^4\right),$$

$$sin\,\eta = -\varrho_1\, d\, cos\,\varphi\, sin\,\varphi + \varrho_1^3 \frac{d^2\sigma}{2}\, sin\,\varphi\, cos\,\varphi^3$$

$$- \tfrac{3}{8}\varrho_1^5 d^3 \sigma^2\, sin\,\varphi\, cos\,\varphi^5.$$

Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, dass σ und d die Summe, resp. die Differenz der Hauptkrümmungen vorstellen.

Führt man nun die Abkürzungen ein:

$$A_1 = \varrho_1 d,$$

$$B_1 = \varrho_1^3 \frac{d^2\sigma}{2},$$

$$C_1 = \tfrac{3}{8}\varrho_1^5 d^3 \sigma^2,$$

so erhält man schliesslich

21) $$sin\,\eta = -A_1\, sin\,\varphi\, cos\,\varphi + B_1\, sin\,\varphi\, cos\,\varphi^3 - C_1\, sin\,\varphi\, cos\,\varphi^5.$$

Wenn nicht das Azimuth des Centralschnitts, sondern das sphärische Azimuth gegeben ist, so findet man durch eine ähnliche Entwickelung, die aber übergangen werden soll, folgende Gleichung:

21a) $$sin\,\eta = -A_1\, cos\,\alpha\, sin\,\alpha + B_1\, cos\,\alpha\, sin\,\alpha^3 - C_1\, cos\,\alpha\, sin\,\alpha^5.$$

Die ersten Glieder, $A_1 \sin\varphi \cos\varphi$ und $A_1 \sin\alpha \cos\alpha$, der vorigen Gleichungen haben den Maximalwerth $\frac{e^2}{2}$; man kann daher den Sinus von η mit dem Bogen vertauschen.

Damit wären diejenigen Grössen bestimmt, aus welchen die sphärische Correction w durch eine einfache Addition hervorgeht. Wenn das geodätische Azimuth gegeben ist, so erhält man aus der 18), 20) und 21) folgende Gleichung:

22)
$$w = \sin a \operatorname{tg} q \operatorname{tg}\varepsilon + \sin a \cos a \operatorname{tg} q^2 \operatorname{tg}\varepsilon^2 - A_1 \sin\varphi \cos\varphi + B_1 \sin\varphi \cos\varphi^3 - C_1 \sin\varphi \cos\varphi^5.$$

Die ersten Glieder geben den Werth von φ, und diesen verwendet man zur Berechnung der übrigen. — Sobald das sphärische Azimuth gegeben ist, folgt aus den 17), 20) und 21a) die Gleichung

22a) $$w = \sin\varphi \operatorname{tg} q \operatorname{tg}\varepsilon - A_1 \cos\alpha \sin\alpha + B_1 \cos\alpha \sin\alpha^3 - C_1 \cos\alpha \sin\alpha^5.$$

In diesem Falle hat man zuerst die drei letzten Glieder zu berechnen; dadurch ergiebt sich der Winkel φ und dann das Uebrige.

Schliesslich sollen noch die Coefficienten A_1, B_1 und C_1 entwickelt werden. Man hat erstens:

$$A_1 = \varrho_1 d = \frac{\varrho_1}{\varrho_0} - 1 = \frac{1 - e^2 \sin\pi^2}{1 - e^2} - 1 = \frac{e^2 \cos\pi^2}{1 - e^2}.$$

Entwickelt man nun weiter

$$\varrho_1 \sigma = \frac{\varrho_1}{\varrho_0} + 1 = 2 + \frac{e^2 \cos\pi^2}{1 - e^2}$$

und multiplicirt den letzten Ausdruck mit $\frac{\varrho_1^2 d^2}{2}$, d. i. mit $\frac{A_1^2}{2}$, so folgt

$$B_1 = \frac{\varrho_1 \sigma . \varrho_1^2 d^2}{2} = \frac{e^4 \cos\pi^4}{(1-e^2)^2} + \frac{e^6 \cos\pi^6}{2(1-e^2)^3}.$$

Den dritten Coefficienten C_1 erhält man durch Multiplication der Grössen $(\varrho_1 d)^3$ und $\frac{3}{8}(\varrho_1 \sigma)^2$. Werden die höheren Potenzen von e vernachlässigt, so kommt

$$C_1 = \tfrac{3}{8} \varrho_1^3 d^3 \varrho_1^2 \sigma^2 = \tfrac{3}{2} \frac{e^6 \cos\pi^6}{(1-e^2)^3}.$$

Stellt man alle drei Grössen zusammen, so folgt endlich

$$A_1 = \frac{e^2 \cos\pi^2}{1 - e^2},$$

$$B_1 = \frac{e^4 \cos\pi^4}{(1-e^2)^2} + \frac{e^6 \cos\pi^6}{2(1-e^2)^3},$$

$$C_1 = \tfrac{3}{2} \frac{e^6 \cos\pi^6}{(1-e^2)^3}.$$

Die Glieder von der Ordnung (e^6) betragen in mittleren und höheren Breiten ungefähr 0,01″ und weniger. Sie treten in den Gleichungen 22) als Factoren der Ausdrücke $\sin\varphi \cos\varphi^3$ und $\sin\varphi \cos\varphi^5$ auf, deren Maximal-

werth sich annähernd auf $\frac{1}{3}$, resp. $\frac{1}{4}$ beläuft. Daraus ist zu ersehen, dass bei Berechnung der sphärischen Correction nur ein Fehler von einigen Tausendtheilen der Secunde begangen wird, wenn die Glieder von der Ordnung e^6 unberücksichtigt bleiben. Die drei Coefficienten nehmen deshalb unter diesen Umständen die einfache Gestalt an:

$$A_1 = \frac{e^2 \cos \pi^2}{1 - e^2}, \quad B_1 = A_1^2 = \frac{e^4 \cos \pi^4}{(1 - e^2)^2}, \quad C_1 = 0.$$

§ 9.

Fortgesetzte Untersuchung des Centralschnitts.

Bezeichnet man die Richtung der dirigirenden Tangente mit lmn, die Richtung der Flächennormale des Anfangspunktes mit $p_0 q_0 r_0$, eines zweiten Punktes des Centralschnitts mit pqr, den Winkel zwischen beiden Normalen mit ∂, so hat man die Gleichungen

$$\begin{aligned} pl + qm + rn &= 0, \\ pp_0 + qq_0 + rr_0 &= \cos \partial, \\ p^2 + q^2 + r^2 &= 1. \end{aligned}$$

Löst man dieselben nach p, q, r auf und setzt

$$l_1 = q_0 n - r_0 m, \quad m_1 = r_0 l - p_0 n, \quad n_1 = p_0 m - q_0 l,$$

so kommt

$$\begin{aligned} p &= p_0 \cos \partial - l_1 \sin \partial, \\ q &= q_0 \cos \partial - m_1 \sin \partial, \\ r &= r_0 \cos \partial - n_1 \sin \partial. \end{aligned}$$

Die Grössen p_0, q_0, r_0 und l_1, m_1, n_1 nehmen besondere Werthe an, wenn der Scheitel des Coordinatensystems in den Anfangspunkt des Centralschnitts verlegt wird, nämlich

$$\begin{aligned} p_0 &= 0, \quad q_0 = 0, \quad r_0 = 1, \\ l_1 &= -m, \quad m_1 = l, \quad n_1 = 0. \end{aligned}$$

Setzt man diese Grössen oben ein, so folgt

$$\begin{aligned} p &= m \sin \partial, \\ q &= -l \sin \partial, \\ r &= \cos \partial. \end{aligned}$$

Dies sind die Ausdrücke für p, q, r, die in der folgenden Entwickelung gebraucht werden.

Wir nehmen nun die Gleichungen 8), Cap. II, vor, welche in abgekürzter Form lauten:

$$\begin{aligned} t_2 x' &= Cq - Br, \\ t_2 y' &= Ar - Cp, \\ t_2 z' &= Bp - Aq, \end{aligned}$$

multipliciren dieselben der Reihe nach mit l, m, n und addiren die Producte. Dann kommt für den Winkel ζ zwischen der dirigirenden Tangente und dem Curvenelemente folgender Ausdruck:

$$\cos\zeta = \frac{(Cq - Br)\,l + (Ar - Cp)\,m}{\sqrt{(Cq - Br)^2 + (Ar - Cp)^2 + (Bp - Aq)^2}}$$

$$= \frac{(Am - Bl)\cos\partial - C\sin\partial}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - (A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 + 2ABpq + 2ACpr + 2BCqr)}}.$$

Setzt man für A und B die ursprünglichen Ausdrücke, welche bei Anwendung des besondern Coordinatensystems durch die Gleichungen

$$A = \alpha l, \quad B = \beta m, \quad C = vl + um$$

gegeben sind, wieder ein und substituirt für p, q, r die entwickelten Werthe, so folgt

$$\cos\zeta = \frac{(\alpha - \beta)\,l.m.\cos\partial - C\sin\partial}{\sqrt{\alpha^2 l^2 + \beta^2 m^2 - (\alpha - \beta)^2\,l^2\,m^2\sin\partial^2 + C^2\sin\partial^2 - 2C(\alpha - \beta)\,l.m.\cos\partial\sin\partial}}.$$

Wird Zähler und Nenner durch

$$\sqrt{\alpha^2 l^2 + \beta^2 m^2} = \partial'_d$$

dividirt und ferner

$$\frac{(\alpha - \beta)\,lm}{\sqrt{\alpha^2 l^2 + \beta^2 m^2}} = \cos\zeta_1$$

gesetzt, so nimmt die Gleichung die einfachere Gestalt an:

23a) $$\cos\zeta = \frac{\cos\zeta_1\cos\partial - \frac{C}{\partial'_d}\sin\partial}{\sqrt{\sin\zeta_1^2 + \left(\cos\zeta_1\cos\partial - \frac{C}{\partial'_d}\sin\partial\right)^2}}.$$

Geht man zur Cotangente über, so kommt

23b) $$\operatorname{cotg}\zeta = \operatorname{cotg}\zeta_1\cos\partial - \frac{C\sin\partial}{\partial'_d\sin\zeta_1}.$$

Dividirt man Zähler und Nenner der 23a) durch $\sin\zeta_1$ und setzt in Hinsicht auf die 17), Cap. II, für $1 : \partial'_d\sin\zeta_1$ den Krümmungsradius ϱ_d, welcher in der Richtung der dirigirenden Tangente zu nehmen ist, so folgt

23c) $$\cos\zeta = \frac{\operatorname{cotg}\zeta_1\cos\partial - \varrho_d.C\sin\partial}{\sqrt{1 + (\operatorname{cotg}\zeta_1\cos\partial - \varrho_d C\sin\partial)^2}}.$$

Dieselbe Substitution kann man auch bezüglich der 23b) vornehmen, wodurch man erhält

23d) $$\operatorname{cotg}\zeta = \operatorname{cotg}\zeta_1\cos\partial - \varrho_d\,C\sin\partial.$$

Durch diese Gleichungen ist also der Winkel zwischen der dirigirenden Tangente und dem Curvenelement als Function des Winkels zwischen den Flächennormalen des Centralschnitts gegeben. Am einfachsten gestalten sich die Formeln, wenn der Anfangspunkt des Centralschnitts mit einem äquatorealen Flächenpunkt zusammenfällt; denn aus der 23b) folgt dann

24) $$\operatorname{cotg}\zeta = \operatorname{cotg}\zeta_1\cos\partial.$$

Auch für die Rotationsflächen zweiten Grades lässt sich eine elegante Formel ableiten. In diesem Falle ist, wie bekannt, $u=0$, und für v erhält man aus der 31), Cap. II, den Werth

$$v = -\,tg\,\pi.d.$$

Setzt man diese Grösse in den Ausdruck für C, so kommt

$$C = -\,d.tg\,\pi\;l,$$

oder, wenn man das sphärische Azimuth nach § 7 einführt:

$$C = -\,d.tg\,\pi\;\sin\alpha_1.$$

Ferner hat man aus der 12a), Cap. II, für ∂'_d die Gleichung

$$\partial'_d = -\,\frac{d\cos\alpha_1\sin\alpha_1}{\cos\zeta_1}.$$

Dividirt man beide Grössen durch einander, so folgt für den Quotienten der Ausdruck

$$\frac{C}{\partial'_d\sin\zeta} = \frac{-\,d.tg\,\pi_1\sin\alpha_1\cos\zeta_1}{d.\cos\alpha_1\sin\alpha_1\sin\zeta_1} = \frac{tg\,\pi_1\,cotg\,\zeta_1}{\cos\alpha_1}.$$

Denselben substituirt man in die 23b) und erhält

$$25)\qquad cotg\,\zeta = cotg\,\zeta_1\left(\frac{\cos\partial\cos\pi_1\cos\alpha_1 - \sin\pi_1\sin\partial}{\cos\pi_1\cos\alpha_1}\right).$$

Die Winkel α_1, π_1, ∂ gehören einem sphärischen Dreieck an, dessen übrige Bestandtheile mit π_2 und α_2 bezeichnet werden sollen. Mittels dieser Grösse lässt sich die 25) umformen, denn man findet auf leichte Weise die Relation

$$\cos\partial\cos\pi_1\cos\alpha_1 - \sin\pi_1\sin\partial = -\cos\pi_2\cos\alpha_2,$$

und demnach für ζ den Ausdruck

$$\frac{cotg\,\zeta}{cotg\,\zeta_1} = -\,\frac{\cos\pi_2\cos\alpha_2}{\cos\pi_1\cos\alpha_1}.$$

Multiplicirt und dividirt man die letzte Gleichung mit

$$\cos\pi_1\sin\alpha_1 = \cos\pi_2\sin\alpha_2$$

und setzt für ζ den Nebenwinkel ζ_2, so dass sich ζ_2 und ζ_1 gegenüberstehen, wie die Winkel an einer Seite eines Dreiecks, so kommt schliesslich

$$26)\qquad \frac{cotg\,\zeta_2}{cotg\,\zeta_1} = \frac{cotg\,\alpha_2}{cotg\,\alpha_1}.$$

Dies ist eine Relation zwischen den Winkeln ζ und den sphärischen Azimuthen an den beiden Endpunkten des Centralschnitts.

§ 10.

Wir schreiten nun zur Ermittelung der Flächenkrümmungsradien des Centralschnitts und versuchen, auch diese Grössen als Functionen des Winkels ∂ darzustellen. Es kommen vorzugsweise zwei Systeme der Krümmungsradien in Betracht. Die einen werden in der Richtung der dirigiren-

den Tangente genommen, die anderen gehören der Richtung des Curvenelements an. Die ersteren sollen in den folgenden Entwickelungen mit ϱ_d, die letzteren mit ϱ_c bezeichnet werden.

Für den Radius ϱ_d erhält man aus der Gleichung 3), Cap. II, einen Ausdruck wenn man anstatt der unbestimmten Richtung $x'y'z'$ die Richtungsgrössen der dirigirenden Tangente lmn einführt. Es folgt dann nämlich die Gleichung

27) $$\frac{t}{\varrho_d} = \alpha l^2 + \beta m^2 = \frac{1}{\varrho_{d_0}},$$

worin sich ϱ_{d_0} auf den Anfangspunkt des Centralschnitts bezieht. Die Grösse t lassen wir einstweilen unbestimmt und gehen bald zur Ermittelung des andern Krümmungsradius ϱ_c über. Aus der 20), Cap II, hat man

$$\frac{1}{\varrho_c} = \frac{\varrho_d \sin\zeta^2}{\varrho_0 \varrho_1}.$$

Der Zähler dieses Ausdrucks enthält nur bekannte Grössen, der Nenner hingegen bleibt noch zu ermitteln. Wenn man die 25a) im zweiten Capitel mit einander multiplicirt, so erhält man schliesslich die Gleichung

$$\frac{t^2}{\varrho_0 \varrho_1} = (\alpha\beta - w^2) r^2 + (\alpha\gamma - v^2) q^2 + (\beta\gamma - u^2) p^2$$
$$+ 2(uv - \gamma w) pq + 2(uw - \beta v) pr + 2(vw - \alpha u) qr.$$

Setzt man darin $w = 0$ und für p, q, r die Werthe aus dem vorigen Paragraphen, so folgt

28) $$\frac{t^2}{\varrho_0 \varrho_1} = \alpha\beta \cos\vartheta^2 + [\gamma(\alpha l^2 + \beta m^2) - C^2] \sin\vartheta^2$$
$$+ 2(\alpha u l - \beta v m) \sin\vartheta \cos\vartheta = P.$$

Diesen Ausdruck bezeichnet man zur Abkürzung mit P und substituirt denselben in die Gleichung für $\frac{1}{\varrho_c}$. Dadurch erhält man schliesslich

29) $$\frac{t}{\varrho_c} = \frac{P \sin\zeta^2}{\alpha l^2 + \beta m^2} = \varrho_{d_0} P \sin\zeta^2.$$

Es bleibt nun noch die Grösse t zu bestimmen. Nach der 14), Cap. II, hat man

$$-t' = p(\alpha x' + v z') + q(\beta y' + u z') + r(v x' + u y' + \gamma z'),$$

ferner nach der 6), Cap. II:

$$(\alpha x' + v z') l + (\beta y' + u z') m = 0.$$

Verbindet man beide Gleichungen, so folgt

$$-t' = (\beta y' + u z') \frac{(q l - p m)}{l} + r(v x' + u y' + \gamma z').$$

Setzt man nun für x', y', z' und p, q, r die Werthe aus dem vorigen Paragraphen ein, so kommt

$$-{}_2t' = -\frac{\sin\partial}{l}(\alpha\beta l\cos\partial - C\beta m\sin\partial + u\beta m^2\sin\partial + u\alpha l^2\sin\partial)$$
$$+ (Cr - l\sin\partial - v\beta m\cos\partial + u\alpha l\cos\partial - uCm\sin\partial$$
$$+ \gamma\beta m^2\sin\partial + \gamma\alpha l^2\sin\partial)\cos\partial,$$

$$-t' = \frac{(\alpha u l - \beta v m)\cos 2\partial + [\gamma(\alpha l^2 + \beta m^2) - \alpha\beta - C^2]\frac{\sin 2\partial}{2}}{t_2 = \sqrt{\alpha^2 l^2 + \beta^2 m^2}\,.\,\frac{\sin\zeta_1}{\sin\zeta}},$$

oder abgekürzt

30) $$-t' = \frac{Q\sin\zeta}{\sqrt{\alpha^2 l^2 + \beta^2 m^2}\,.\,\sin\zeta_1} = \varrho_{d_0} Q\sin\zeta.$$

Differentiirt man P nach ∂ und vergleicht das Differential mit Q, so erhält man die Relation

31) $$\frac{dP}{d\partial} = 2Q.$$

Durch die 17), Cap. II, erhält man

$$ds = \varrho_c \sin\zeta\, d\partial.$$

Führt man den Werth für ϱ_c aus der 29) ein, so kommt

32) $$\frac{ds}{t} = \frac{d\partial}{\varrho_{d_0} P\sin\zeta}.$$

Wird diese Gleichung mit der 30) multiplicirt, so erhält man in Rücksicht auf die 31)

$$-\frac{dt}{t} = \frac{Q\,d\partial}{P} = \frac{dP}{2P}.$$

Daraus lässt sich nun die Grösse t durch Integration bestimmen. Es kommt ohne Weiteres

$$\log c\,t P^{1/2} = 0 \quad \text{oder} \quad t = \frac{1}{c\,P^{1/2}}.$$

Um die Constante zu ermitteln, setzt man $\partial = 0$. Es wird dann $t = 1$, $P = \alpha\beta$ und mithin

$$c = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}.$$

Dies eingeführt, giebt schliesslich

33) $$t = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{P}}.$$

Die Grössen t und P sind, wie nebenbei bemerkt werden soll, einfache Functionen des Krümmungsmasses. Bezeichnet man das Krümmungsmass am Anfangs- und Endpunkte des Centralschnitts mit k_0, beziehungsweise mit k, so findet man durch Verbindung der beiden Gleichungen 28) und 33) sofort

34) $$P^2 = k_0 k, \quad t^4 = \frac{k_0}{k}.$$

Wird nun endlich der gefundene Werth von t in die 27) und 29) substituirt, so erhält man für die Krümmungsradien folgende Gleichungen:

35) $$\frac{1}{\varrho_d} = \frac{\sqrt{\varrho_0 \varrho_1} \cdot P^{1/2}}{\varrho_{d_0}} \cdot = \sqrt{\varrho_{c_0}} \sin \zeta_0 \left(\frac{P}{\varrho_{d_0}}\right)^{1/2},$$

36) $$\frac{1}{\varrho_i} = \varrho_{d_0} \sqrt{\varrho_0 \varrho_1}\, P^{3/2} \sin \zeta^2 \cdot = \sqrt{\varrho_{c_0}} \cdot \sin \zeta_0 \cdot (\varrho_{d_0} \cdot P)^{3/2} \sin \zeta^2.$$

§ 11.

Rectification des Centralschnitts.

Nunmehr sind wir im Stande, auch das Curvenelement als Function des Winkels ∂ auszudrücken. Setzt man nämlich den Werth von t in die 31), so kommt die allgemeine Gleichung

37) $$ds = \frac{\sqrt{\alpha\beta} \cdot d\partial}{\varrho_{d_0} P^{3/2} \sin \zeta} = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\varrho_{d_0}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(cotg\, \zeta_0 \cos \partial - \frac{C \sin \partial}{\partial' d_0 \sin \zeta_0}\right)^2}}{P^{3/2}}.$$

Geht man zum zweiaxigen Ellipsoid über und beachtet die 25), so folgt ferner

$$ds = \frac{\sqrt{\alpha\beta} \cdot \sqrt{1 + \frac{cotg\, \zeta_0^2}{\cos \pi_1^2 \cos \alpha_1^2} (\cos \pi_1 \cos \alpha_1 \cos \partial - \sin \pi_1 \sin \partial)^2}}{\varrho_{d_0} \cdot P^{3/2}}.$$

Für P substituirt man den Ausdruck der 28), dividirt denselben durch $\alpha\beta$ und erhält schliesslich

38) $$ds = \frac{\sqrt{1 + \frac{cotg\, \zeta_0^2}{\cos \pi_1^2 \cos \alpha_1^2} (\cos \pi_1 \cos \alpha_1 \cos \partial - \sin \pi_1 \sin \partial)^2}}{\alpha\beta \cdot \varrho_{d_0} \left[1 + \left(\frac{\gamma}{\varrho_{d_0}} - \alpha\beta - C^2\right) \sin \partial^2 + \frac{2 \cdot tg\, \pi_1 \cdot d \cdot \cos \alpha_1}{\alpha} \cdot \sin \partial \cos \partial\right]^{3/2}}.$$

Die vorstehende Formel gestaltet sich einfacher, wenn man von demjenigen Punkte des Centralschnitts ausgeht, in welchem die Curve den Meridian rechtwinklig durchschneidet. Wir wollen ihn den Scheitelpunkt des Centralschnitts nennen. Um die Lage desselben zu finden, setzt man die 25) $= 0$. Es entsteht dann die Gleichung

$$\cos \pi_1 \cos \alpha_1 \cos \partial_{01} = \sin \pi_1 \sin \partial_{01}$$

oder

39) $$tg\, \partial_{01} = cotg\, \pi_1 \cos \alpha_1.$$

In ebenso einfacher Weise lässt sich auch die Polhöhe ermitteln. Der gesuchte Scheitelpunkt π_0 bildet nämlich mit dem gegebenen Punkte π_1 und mit dem Pole des Sphäroids ein rechtwinkliges Dreieck. Daher folgt ohne Weiteres die Relation

40) $$\cos \pi_0 = \cos \pi_1 \sin \alpha_1.$$

Aus beiden Formeln ist ersichtlich, dass sich der Uebergang von einem beliebigen Punkte des Centralschnitts zum Scheitelpunkte desselben ohne Schwierigkeit bewerkstelligen lässt, und es kommt nun nur noch darauf an, in der Gleichung 38) die Constanten zu ermitteln, welche dem letztgedachten Punkte entsprechen. Nimmt man zuerst die einzelnen Glieder des Zählers vor, so folgt aus den 12) und 17) des zweiten Capitels

$$\frac{colg\,\xi_0}{cos\,\pi_0\,cos\,\alpha_0} = -\frac{d\,cos\,\alpha_0\,sin\,\alpha_0 . \varrho_0 \partial'_0}{\partial'_0\,cos\,\alpha_0\,cos\,\pi_0} = -\frac{\varrho_0 d}{cos\,\pi_0}$$

$$= \frac{1}{cos\,\pi_0} \cdot \frac{a\,(1-e^2)\,(1-e^2\,sin\,\pi_0^{\,2})^{1/2}}{a\,(1-e^2\,sin\,\pi_0^{\,2})^{3/2}} = \frac{(1-e^2)}{cos\,\pi_0\,(1-e^2\,sin\,\pi_0^{\,2})} = -\frac{e^2\,cos\,\pi_0}{1-e^2\,sin\,\pi_0^{\,2}}.$$

Der zweite Factor unter'm Wurzelzeichen wird

$$= sin\,\pi_0\,sin\,\partial.$$

Der Zähler nimmt daher folgende Gestalt an:

$$\sqrt{1+\frac{e^4\,cos\,\pi_0^{\,2}\,sin\,\pi_0^{\,2}.\,sin\,\partial^2}{(1-e^2\,sin\,\pi_0^{\,2})^2}} = \sqrt{1+tg\,\varepsilon^2\,sin\,\partial^2}.$$

Im Nenner erhält man erstens für das Product $\alpha\beta\varrho_{d_0}$ den Werth $\frac{1}{\varrho_1}$. Unter der Klammer verschwindet, da $cos\,\alpha = 0$, das letzte Glied und es bleibt daher nur der mittlere Ausdruck zu entwickeln. Durch Substitution des Werthes von C bringt man denselben auf die Form

$$\varrho_1\,\gamma - 1 - \varrho_1\,\varrho_0\,d^2\,tg\,\pi^2.$$

Sämmtliche Grössen dieses Ausdruckes sind bekannt, mit Ausnahme der γ, welche noch ermittelt werden muss. Bezeichnet man die Strecke, die durch die Fläche auf der Flächennormale abgeschnitten wird, mit z, so hat man aus dem § 8, Cap. II, die Gleichung

$$\gamma = \frac{2}{z}.$$

Die Coordinaten der beiden Endpunkte von z mögen mit x_1 und x_2, y_1 und y_2, z_1 und z_2, ferner die Richtungsgrössen der Normalen mit p, q, r bezeichnet werden; dann folgen die Gleichungen

$$x_2 - x_1 = pz, \quad y_2 - y_1 = qz, \quad z_2 - z_1 = rz,$$
$$x_1 = x_2 - pz, \quad y_1 = y_2 - qz, \quad z_1 = z_2 - rz.$$

Setzt man diese Werthe in die allgemeine Flächengleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1,$$

so erhält man

$$z^2\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{a^2}+\frac{r^2}{c^2}\right) = 2z\left(\frac{x_2 p}{a^2}+\frac{y_2 q}{a^2}+\frac{z_2 r}{c^2}\right)$$

oder

$$z = \frac{2\left(\frac{x_2 p}{a^2}+\frac{y_2 q}{a^2}+\frac{z_2 r}{c^2}\right)}{\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{a^2}+\frac{r^2}{c^2}}.$$

Für p, q, r hat man die besonderen Werthe $\cos\pi$, 0, $\sin\pi$; die Grössen x_2, y_2, z_2 sind aus der Gleichung 6) zu entnehmen. Daraus folgt

$$z = \frac{2\left(\frac{\cos\pi^2}{a} + \frac{\sin\pi^2}{a}\right)}{\left(\frac{\cos\pi^2}{a^2} + \frac{\sin\pi^2}{c^2}\right)\sqrt{1-e^2\sin\pi^2}} = \frac{2.c^2}{a\sqrt{1-e^2\sin\pi^2}\,(1-e^2\cos\pi^2)}$$

und schliesslich

$$\gamma = \frac{a\,(1-e^2\cos\pi^2)\sqrt{1-e^2\sin\pi^2}}{c^2}.$$

Geht man nun mit dem so ermittelten Werthe von γ in den obigen Ausdruck zurück, so kommt

$$\varrho_1\gamma - 1 = \frac{1-e^2\cos\pi^2}{1-e^2} - 1 = \frac{e^2\sin\pi^2}{1-e^2}.$$

Fügt man dazu das letzte Glied

$$\varrho_1\varrho_0 tg\pi^2 d^2 = \varrho_1 d.\varrho_0 d.tg\pi^2$$

$$= \frac{e^2\cos\pi^2}{1-e^2}\cdot\frac{e^2\cos\pi^2}{1-e^2\sin\pi^2}\cdot tg\pi^2 = \frac{e^4\cos\pi^2\sin\pi^2}{(1-e^2)\,(1-e^2\sin\pi^2)},$$

so erhält man schliesslich

$$\varrho_1\gamma - 1 - \varrho_1\varrho_0 . d^2 . tg\pi^2$$

$$= \frac{e^2\sin\pi^2}{1-e^2}\left(1 - \frac{e^2\cos\pi^2}{1-e^2\sin\pi^2}\right) = \frac{e^2\sin\pi^2}{1-e^2}\cdot\frac{1-e^2}{1-e^2\sin\pi^2} = \frac{e^2\sin\pi^2}{1-e^2\sin\pi^2}.$$

Damit sind für sämmtliche Constanten der Gleichung 38) die Werthe, welche dem Scheitelpunkte des Centralschnitts angehören, bestimmt. Setzt man dieselben ein, so kommt endlich

41) $$ds = \frac{\varrho_1\sqrt{1+tg\varepsilon^2\sin\partial^2}}{\left[1+\frac{e^2\sin\pi^2}{1-e^2\sin\pi^2}\cdot\sin\partial^2\right]^{3/2}}.$$

Um diese Gleichung zu integriren, setzt man vorübergehend

$$\frac{e^2\sin\pi^2}{1-e^2\sin\pi^2} = m,$$

entwickelt Zähler und Nenner in Reihen, vernachlässigt dabei die Glieder von der Ordnung (e^8) und erhält

$$ds = \varrho_1\,(1+tg\,\varepsilon^2\sin\partial^2)\,(1-\tfrac{3}{2}m\sin\partial^2 + \tfrac{15}{8}m^2\sin\partial^4 - \tfrac{35}{16}m^3\sin\partial^6)$$

$$= \varrho_1\left[1-\left(\tfrac{3}{2}m - \frac{tg\,\varepsilon^2}{2}\right)\sin\partial^2 + (\tfrac{15}{8}m^2 - \tfrac{3}{4}m\,.\,tg\,\varepsilon^2)\sin\partial^4 - \tfrac{35}{16}m^3\sin\partial^6\right].$$

Führt man die Abkürzungen ein:

$$A_2 = \tfrac{3}{2}m - \frac{tg\,\varepsilon^2}{2},$$

$$B_2 = \tfrac{15}{8}m^2 - \tfrac{3}{4}m\,tg\,\varepsilon^2,$$

$$C_2 = \tfrac{35}{16}m^3,$$

so geht die letzte Gleichung in folgende über:

$$ds = \varrho_1 (1 - A_2 \sin\partial^2 + B_2 \sin\partial^4 - C_2 \sin\partial^6)\, d\partial.$$

Durch die allgemeinen Relationen

$$\sin\partial^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2\partial,$$
$$\sin\partial^4 = \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2}\cos 2\partial + \tfrac{1}{8}\cos 4\partial,$$
$$\sin\partial^6 = \tfrac{5}{16} - \tfrac{1}{32}\cos 2\partial + \tfrac{3}{16}\cos 4\partial - \tfrac{1}{32}\cos 6\partial$$

erhält man daraus

$$ds = \varrho_1 (P + Q\cos 2\partial + 2R\cos 4\partial + 3S\cos 6\partial)\, d\partial,$$

wo man für P, Q, R, S folgende Ausdrücke zu setzen hat:

$$P = 1 - \frac{A_2}{2} + \tfrac{3}{8} B_2 - \tfrac{5}{16} C_2,$$
$$Q = \tfrac{1}{2} A_2 - \tfrac{1}{2} B_2 + \tfrac{15}{32} C_2,$$
$$R = \tfrac{1}{16} B_2 - \tfrac{3}{32} C_2,$$
$$S = \tfrac{1}{96} C_2.$$

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass die hier eingeführten Grössen P und Q nicht zu verwechseln sind mit den gleichbezeichneten Grössen in den §§ 10 und 11. — Integrirt man nun die Gleichung, so folgt

$$s_{01} = \varrho_1 \left(P\partial_{01} + \frac{Q}{2}\sin 2\partial_{01} + \frac{R}{2}\sin 4\partial_{01} + \frac{S}{2}\sin 6\partial_{01} \right).$$

Damit ist der Bogen des Centralschnitts vom Scheitelpunkte π_0 bis zum Punkte π_1 gegeben. Ein zweiter Punkt π_2 liefert die analoge Gleichung

$$s_{02} = \varrho_1 \left(P\partial_{02} + \frac{Q}{2}\sin 2\partial_{02} + \frac{R}{2}\sin 4\partial_{02} + \frac{S}{2}\sin 6\partial_{02} \right).$$

Subtrahirt man beide Gleichungen von einander, so folgt schliesslich für die Entfernung zwischen den beliebigen Punkten π_1 und π_2 der Ausdruck

$$\begin{aligned} s_1 - s_2 = \varrho_1 [& P(\partial_1 - \partial_2) + Q\cos(\partial_1 + \partial_2)\sin(\partial_1 - \partial_2) \\ & + R\cos 2(\partial_1 + \partial_2)\sin 2(\partial_1 - \partial_2) \\ & + S\cos 3(\partial_1 + \partial_2)\sin 3(\partial_1 - \partial_2)]. \end{aligned} \qquad 42)$$

Die Winkel ∂_{01} und ∂_{02} haben gleiche Vorzeichen, wenn der Scheitelpunkt des Centralschnitts ausserhalb der gesuchten Bogenstrecke liegt; im andern Falle hat man denselben entgegengesetzte Vorzeichen zu geben.

§ 12.

Wir wollen nun die im vorigen Paragraphen behandelte Aufgabe umkehren und annehmen, es sei jetzt ein Punkt π_1 des Centralschnitts und die Länge σ des Bogens $\pi_1\pi_2$ gegeben und der Winkel zu ermitteln, den die Flächennormalen an den Endpunkten des gegebenen Bogens mit einander bilden.

Vor allen Dingen ist auch hier erst der Scheitelpunkt des Centralschnitts mittels der Formeln 39) und 40) zu bestimmen. Dadurch erhält man den Winkel ∂_1, die Polhöhe π_0 und mithin auch die Factoren P, Q, R, S

und ϱ_1 der Gleichung 42). Als einzige Unbekannte tritt nur noch der Winkel ∂_2 auf. Um denselben zu ermitteln, dividirt man die 42) durch $\varrho_1 P$ und schreibt sie in der Form

$$\frac{s_1 - s_2}{\varrho_1 P} = \frac{\sigma}{\varrho_1 P} = f(\partial_2).$$

Für ∂_2 substituirt man den Ausdruck $a+b$, betrachtet die a als einen Näherungswerth und die b als eine kleine Grösse von der Ordnung (e^2) und entwickelt die vorige Gleichung nach dem Taylor'schen Satze. Setzt man noch zur Abkürzung

$$\frac{\sigma}{\varrho_1 P} = \varphi,$$

so folgt

$$\varphi = f(a+b) = f'(a) + bf'(a) + \frac{b^2}{2} f''(a) + \frac{b^3}{6} f'''(a).$$

Giebt man nun in dieser Gleichung der Grösse a einen bestimmten Werth, so hat man es nur noch mit der Unbekannten b zu thun. Für die letztere substituirt man wiederum einen genäherten Werth a_1 mittels der Gleichung

$$b = a_1 + b_1$$

und wählt denselben so, dass die zweite Grösse b_1 von keiner niederen, als der Ordnung (e^4) ist. Die Entwickelung nach dem Taylor'schen Satze liefert dann

$$\varphi = f(a) + a_1 . f(a) + \frac{a_1^2}{2} f''(a) + \frac{a_1^3}{6} f'''(a) + \left(f'(a) + a_1 f''(a) + \frac{a_1^2}{2} f'''(a) \right) b_1. \qquad 43)$$

Diese Gleichung ist linear in Bezug auf die Unbekannte b_1 und kann sofort gelöst werden, wenn die Näherungswerthe a und a_1 gegeben sind. Die letzteren entnimmt man leicht aus den Gleichungen 42) und 43). Denn vernachlässigt man in der 42) die Glieder von der Ordnung (e^2) und darüber, so erhält man für den ersten genäherten Werth a die Relation

$$a = \partial_1 - \varphi,$$

und übergeht man in der 43) die Glieder von der Ordnung (a_1^2), d. i. (e^4), und darüber, so erhält man für a_1 die Gleichung

$$a_1 = \frac{\varphi - f(a)}{f'(a)}.$$

Beide Ausdrücke substituirt man in die 43) und gelangt so zur dritten Grösse b_1. Es kommt

$$b_1 = \frac{\varphi - f(a) - a_1 f'(a) - \frac{a_1^2}{2} f''(a) - \frac{a_1^3}{6} f'''(a)}{f'(a) + a_1 f''(a) + \frac{a_1^2}{2} f'''(a)}$$

und, da die Derivationen $f''(a)$ und $f'''(a)$ von der Ordnung (e^2) sind:

$$b_1 = -\frac{a_1^2}{2} \cdot \frac{f''(a)}{f'(a)}.$$

Die Summe dieser drei Grössen giebt den gesuchten Winkel ∂_2 durch die Gleichung

44) $$\partial_2 = a + a_1 + b_1 = \partial_1 - \varphi + \frac{\varphi - f(a)}{f'(a)} - \frac{a_1^2}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}.$$

Daraus ist ersichtlich, dass es nur noch darauf ankommt, die Functionswerthe $f(a)$, $f'(a)$ und $f''(a)$ zu ermitteln. Man hat nun

$$f(\partial_2) = (\partial_1 - \partial_2) + \frac{Q}{P}\cos(\partial_1 + \partial_2)\sin(\partial_1 - \partial_2) + \frac{R}{P}\cos 2(\partial_1 - \partial_2)\sin 2(\partial_1 - \partial_2)$$
$$+ \frac{S}{P}\cos 3(\partial_1 + \partial_2)\sin 3(\partial_1 - \partial_2),$$
$$\frac{df}{d\partial_2} = -\left(1 + \frac{Q}{P}\cos 2\partial_2 + \frac{2R}{P}\cos 4\partial_2 + \frac{3S}{P}\cos 6\partial_2\right),$$
$$\frac{d^2f}{d\partial_2^2} = \left(\frac{2Q}{P}\sin 2\partial_2 + \frac{8R}{P}\sin 4\partial_2 + \frac{18S}{P}\sin 6\partial_2\right).$$

Substituirt man in diesen Gleichungen für ∂_2 den genäherten Werth a und bezeichnet die Summe $\partial_1 + a$ mit ψ, so folgt

$$f(a) = \partial_1 - a + \frac{Q}{P}\cos\psi\sin\varphi + \frac{R}{P}\cos 2\psi\sin 2\varphi + \frac{S}{P}\cos 3\psi\sin 3\varphi,$$
$$f'(a) = -\left(1 + \frac{Q}{P}\cos 2a + \frac{2R}{P}\cos 4a + \frac{3S}{P}\cos 6a\right),$$
$$f''(a) = \frac{2Q}{P}\sin 2a + \frac{8R}{P}\sin 4a + \frac{18S}{P}\sin 6a\Big),$$

Entwickelt man nun zuerst die Grösse a_1, so kommt

$$a_1 = \frac{\frac{\sigma}{\varrho_1} - P(\partial_1 - a) - (Q\cos\psi\sin\varphi + R\cos 2\psi\sin 2\varphi + S\cos 3\psi\sin 3\varphi)}{-(P + Q\cos 2a + 2R\cos 4a + 3S\cos 6a)}$$
$$= \left(\frac{Q}{P}\cos\psi\sin\varphi + \frac{R}{P}\cos 2\psi\sin 2\varphi + \frac{S}{P}\cos 3\psi\sin 3\varphi\right)\left(1 - \frac{Q}{P}\cos 2a - \frac{2R}{P}\cos 4a + \frac{Q^2}{P^2}\cos 2a^2\right)$$
$$= a_1 = \frac{Q}{P}\cos\psi\sin\varphi + \frac{R}{P}\cos 2\psi\sin 2\varphi + \frac{S}{P}\cos 3\psi\sin 3\varphi$$
$$- \frac{Q^2}{P^2}\cos\psi\sin\varphi\cos 2a - \frac{QR}{P^2}\cos 2\psi\sin 2\varphi\cos 2a$$
$$- \frac{2.QR}{P}\cos\psi\sin\varphi\cos 4a + \frac{Q^3}{P^3}\cos\psi\sin\varphi\cos 2a^2,$$

und bestimmt man dadurch das letzte Glied der Gleichung 44), so folgt ferner

$$\frac{a_1^2}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)} = -\frac{Q^3}{P^3}\cos\psi^2 \sin\varphi^2 \sin 2a.$$

Durch einfache Addition dieser Ausdrücke erhält man schliesslich die Gleichung

$$\begin{aligned}\partial_1 - \partial_2 = \varphi &- \frac{Q}{P}\cos\psi \sin\varphi - \frac{R}{P}\cos 2\psi \sin 2\varphi - \frac{S}{P}\cos 3\psi \sin 3\varphi \\ &+ \frac{Q^3}{P^2}\cos\psi \sin\varphi \cos 2a + \frac{QR}{P^2}\cos 2\psi \sin 2\varphi \cos 2a \\ &+ \frac{2QR}{P^2}\cos\psi \sin\varphi \cos 4a - \frac{Q^3}{P^3}\cos\psi \sin\varphi \cos 2a^2 \\ &- \frac{Q^2}{P^3}\cos\psi^2 \sin\varphi^2 \sin 2a.\end{aligned} \qquad 45)$$

Darin werden die zuletzt eingeführten Bezeichnungen φ, ψ und a durch folgende Gleichungen definirt:

$$\varphi = \frac{\sigma}{\varrho_1 P}, \quad \psi = 2\partial_1 - \varphi, \quad a = \partial_1 - \varphi.$$

Die Formel 45) enthält zwar eine bedeutende Anzahl von Gliedern, darunter sind aber fünf von der Ordnung (e^6), welche man mit wenigen Decimalstellen berechnen kann. Sobald der Bogen σ die gewöhnliche Seitenlänge von 10 bis 15 Meilen nicht überschreitet, wird man in den meisten Fällen mit den folgenden Gliedern ausreichen:

$$\begin{aligned}\partial_1 - \partial_2 = \varphi &- \frac{Q}{P}\cos\psi \sin\varphi - \frac{R}{P}\cos 2\psi \sin 2\varphi \\ &+ \frac{Q^2}{P^2}\cos\psi \sin\varphi \cos 2a - \frac{Q^3}{P^3}\cos\psi \sin\varphi \cos 2a^2.\end{aligned} \qquad 46)$$

§ 13.

Nunmehr sollen noch die Coefficienten P, Q, R, S entwickelt werden. Nach § 11 hat man

$$\begin{aligned}P &= 1 - \tfrac{1}{2}A_2 + \tfrac{3}{8}B_2 - \tfrac{5}{16}C_2, \\ Q &= \tfrac{1}{2}A_2 - \tfrac{1}{2}B_2 + \tfrac{15}{32}C_2, \\ R &= \tfrac{1}{16}B_2 - \tfrac{3}{32}C_2, \\ S &= \tfrac{1}{96}C_2.\end{aligned}$$

Für A_2, B_2, C_2 sind die Ausdrücke zu setzen:

$$\begin{aligned}A_2 &= \tfrac{3}{2}m - \tfrac{1}{2}tg\,\varepsilon^2, \\ B_2 &= \tfrac{15}{8}m^2 - \tfrac{3}{4}m.tg\,\varepsilon^2, \\ C_2 &= \tfrac{315}{16}m^3.\end{aligned}$$

Dadurch gehen die vorigen Gleichungen in die folgenden über:

$$\begin{aligned}P &= 1 - \tfrac{3}{4}m + \tfrac{1}{4}tg\,\varepsilon^2 + \tfrac{45}{64}m^2 - \tfrac{9}{32}m.tg\,\varepsilon^2 - \tfrac{1575}{256}m^3, \\ Q &= \tfrac{3}{4}m - \tfrac{1}{4}tg\,\varepsilon^2 - \tfrac{15}{16}m^2 + \tfrac{3}{8}m.tg\,\varepsilon^2 + \tfrac{525}{512}m^3, \\ R &= \tfrac{15}{128}m^2 - \tfrac{3}{64}m\,tg\,\varepsilon^2 - \tfrac{105}{512}m^3, \\ S &= \tfrac{315}{1536}m^3.\end{aligned}$$

Die Grössen m und $tg\,\varepsilon$ werden in Reihen aufgelöst, wodurch man erhält

$$\begin{aligned} m &= e^2 \sin\pi^2 + e^4 \sin\pi^4 + e^6 \sin\pi^6, \\ m^2 &= e^4 \sin\pi^4 + 2\,e^6 \sin\pi^6, \\ m^3 &= e^6 \sin\pi^6, \\ tg\,\varepsilon^2 &= e^4 \sin\pi^2 - (e^4 - 2\,e^6) \sin\pi^4 - 2\,e^6 \sin\pi^6, \\ m\,tg\,\varepsilon^2 &= e^6 \sin\pi^4 - e^6 \sin\pi^6. \end{aligned}$$

Setzt man diese Reihen oben ein, so folgt

$$\begin{aligned} P &= 1 - \left(\tfrac{3}{4}e^2 - \frac{e^4}{4}\right) \sin\pi^2 - (\tfrac{19}{64}e^4 - \tfrac{7}{32}e^6) \sin\pi^4 - \tfrac{63}{256}e^6 \sin\pi^6, \\ Q &= -\left(\tfrac{3}{4}e^2 - \frac{e^4}{4}\right) \sin\pi^2 + (\tfrac{1}{16}e^4 - \tfrac{1}{8}e^6) \sin\pi^4 + \tfrac{113}{512}e^6 \sin\pi^6, \\ R &= \ldots\ldots\ldots (\tfrac{15}{128}e^4 - \tfrac{3}{64}e^6) \sin\pi^4 + \tfrac{39}{512}e^6 \sin\pi^6, \\ S &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tfrac{35}{1536}e^6 \sin\pi^6. \end{aligned} \tag{47}$$

Berechnet man die Constanten dieser Ausdrücke und setzt

$$\log e = 8{,}9122052075,$$

so kommt schliesslich noch

$$\begin{aligned} P &= 1 - 7{,}6985044 \sin\pi^2 - 5{,}119253 \sin\pi^4 - 2{,}8643 \sin\pi^6, \\ Q &= \quad 7{,}6985044 \sin\pi^2 + 4{,}438865 \sin\pi^4 + 1{,}8779 \sin\pi^6, \\ R &= \quad\quad\quad\quad 4{,}716541 \sin\pi^4 + 2{,}3550 \sin\pi^6, \\ S &= \quad\quad\quad\quad\quad\quad 1{,}8309 \sin\pi^6. \end{aligned} \tag{48}$$

§ 14.

Bevor wir weiter gehen, sollen die in den vorigen Paragraphen behandelten Aufgaben durch ein Beispiel erläutert werden. Wir benutzen dazu die Data des § 4, nämlich die ursprünglich gegebenen Grössen

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 52^0\,30'\,16{,}7'', \\ \pi_2 &= 54^0\,42'\,50{,}6'', \\ \lambda &= \quad 7^0\quad 6'\quad -, \end{aligned}$$

und die berechneten

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \quad 59^0\,29'\,40{,}65'', \\ \alpha_2 &= 114^0\,47'\,10{,}71''. \end{aligned}$$

Daraus wird nun zuerst die dritte Seite des sphärischen Dreiecks ermittelt. Es folgt für dieselbe nach bekannten Sätzen der sphärischen Trigonometrie

$$\vartheta_{12} = 4^0\,45'\,12{,}8''.$$

Hierauf geht man mittels der Formel 39) zum Scheitelpunkt des Centralschnitts über und erhält

$$\vartheta_{01} = 21^0\,16'\,41{,}38''.$$

Durch Addition und Subtraction dieser Winkel folgt

$$\begin{aligned} \vartheta_{02} &= 16^0\,31'\,28{,}58'', \\ \vartheta_1 + \vartheta_2 &= 37^0\,48'\ 9{,}96'', \end{aligned}$$

$$\partial_1 - \partial_2 = 4^0\,45'\,12{,}8'',$$
$$log(\partial_1 - \partial_2) = 8{,}9188960.$$

Ferner berechnet man die Polhöhe des Scheitelpunktes nach Formel 40) und erhält

$$\pi_0 = 58^0\,22'\,9{,}47''.$$

Nun kann zur Ermittelung der Grössen P, Q, R, S geschritten werden. Aus den 48) resultiren die Werthe

$$log\,P = 9{,}998421575,$$
$$log\,Q = 7{,}5589921,$$
$$log\,R = 4{,}438536,$$
$$log\,S = 1{,}4118.$$

Schliesslich bleibt noch der Krümmungsradius ϱ_1 zu bestimmen. Setzt man nach Bessel

$$log\,a = 6{,}5148235337,$$

wo a den Halbmesser des Aequators vorstellt, so folgt nach bekannter Formel

$$log\,\varrho_1 = 6{,}515876784.$$

Bringt man nun die 42) auf die Form

$$s_1 - s_2 = \varrho_1 P(\partial_1 - \partial_2)\,[1 + (1) + (2) + (3)],$$

so kommt

$$(1) = 0{,}0028692485,$$
$$(2) = \quad 13635,$$
$$(3) = \quad -\ 31$$
$$\text{zusammen } 0{,}0028706089.$$

Daraus folgt weiter

$$log\,[1 + (1) + (2) + (3)] = 0{,}001244904.$$

Für den ersten Factor erhält man leicht

$$log\,\varrho_1 P\,(\partial_1 - \partial_2) = 5{,}433194359.$$

Addirt man beide zusammen, so kommt schliesslich

$$log(s_1 - s_2) = log\,\sigma = 5{,}434439263.$$

Damit ist die Länge des Centralschnitts ermittelt.

Wir gehen nun zur zweiten Aufgabe über und bedienen uns dabei desselben Dreiecks, wie vorhin. Es sei gegeben die Polhöhe π_1, das sphärische Azimuth α_1 und die Länge σ des Centralschnitts; gesucht werde die Lage des zweiten Punktes π_2.

Auch hier hat man zuerst den Scheitelpunkt des Centralschnitts zu berechnen. Daraus folgen die Werthe

$$\partial_{01} = 21^0\,16'\,41{,}38'',$$
$$\pi_0 = 58^0\,22'\ 9{,}47''.$$

Mittels derselben bestimmt man die Grössen P, Q, R, S, ϱ_1 und dann die Hilfsgrösse φ. Für die letztere kommt

$$\log \varphi = \log \frac{\sigma}{\varrho_1 P} = 8{,}920140904,$$

$$\varphi = 4^0\,46'\,1{,}92''.$$

Daraus erhält man ferner

$$a = \partial_1 - \varphi = 16^0\,30'\,39{,}46'',$$
$$\psi = 2\partial_1 - \varphi = 37^0\,47'\,20{,}84''.$$

Bringt man nun die 45) auf die Form

$$\partial_1 - \partial_2 = \varphi\,\{1 - [(1) + (2) + (3) + \ldots + (8)]\},$$

so erhält man für die einzelnen Glieder

(1) =	+ 0,0028697600,	(4) =	− 0,00000874780,
(2) =	13660,	(3) =	305,
(7) =	267,	(5) =	416,
(8) =	14	(6) =	642
	+ 0,002871154,1,		− 0,000008761,43.
	− 8761,4		
	zusammen 0,002862393.		

Daraus folgt weiter

$$\log\{1 - [(1) + (2) + (3) + \ldots + (8)]\} = 9{,}998755096.$$

Addirt man dazu den Logarithmus von φ, so kommt schliesslich

$$\log(\partial_1 - \partial_2) = 8{,}918896000.$$

Dieses Resultat stimmt mit der entsprechenden Grösse der vorigen Aufgabe überein.

Hat man auf diese Weise den Winkel $\partial_1 - \partial_2$ berechnet, so sind in dem sphärischen Dreiecke

$$\pi_1,\ \pi_2,\ \text{Pol}$$

drei Stücke bekannt, und alle übrigen lassen sich nach den Regeln der sphärischen Trigonometrie ermitteln.

§ 15.

Längenunterschied zwischen dem Normal- und Centralschnitt.

Wenn man sich bei der Berechnung der Entfernungen auf dem Sphäroid des Centralschnitts bedienen will, so ist es von Interesse, zu wissen, wie sich diese Curve zu anderen, bereits bekannten Linien, also zum Normalschnitt und zur kürzesten Linie verhält. Eine allgemeine Untersuchung dieser Frage würde auf sehr weitläufige Entwickelungen führen. Wir sehen daher von einer solchen ab und beschränken uns darauf, den Längenunterschied zwischen dem Centralschnitt und Normalschnitt für Linien von nur mässiger Ausdehnung zu ermitteln.

Da die beiden Curven verwandte Eigenschaften, wodurch sie leicht mit einander verglichen werden könnten, nicht besitzen, so ist es vortheilhaft, eine Hilfscurve einzuführen. Man wählt dazu am besten diejenige, in

welcher die dirigirende Tangente bei ihrem Fortgleiten die Ebene des Normalschnitts trifft. Sie soll in der folgenden Entwickelung der Kürze halber mit H bezeichnet werden. Um sich die Lage der drei Curven zu versinnlichen, kann man den Abstand zwischen dem Centralschnitt und der H als Abscisse und den Abstand zwischen der H und dem Normalschnitt als Ordinate betrachten und beide Coordinaten ermitteln. Dies soll für den Fall geschehen, wo die Abscisse ξ ihren grössten Werth hat. Bezeichnet man den mittleren Erdradius mit r, die Länge der Curve mit σ, den Winkel zwischen den beiden Flächennormalen mit ∂, den Winkel zwischen den Tangenten des Central- und Normalschnitts mit $(\varphi - a)$, so erhält man durch eine leichte Entwickelung den genäherten Werth

$$\xi = \frac{\sigma(\varphi - a)}{4}.$$

Die Winkelgrösse $(\varphi - a)$ ist, wie die Gleichung 18) zeigt, von der Ordnung (e^2). Führt man dies ein, so folgt

$$\xi = \frac{\sigma e^2}{4} = \frac{r\ e^2.\partial}{4} = \tfrac{3}{2}\partial.$$

Die Ordinate η, welche diesem Maximalwerthe von ξ entspricht, ist eine Function von ξ und r. Man erhält für dieselbe nach einfachen Sätzen der Planimetrie

$$\eta = \frac{\xi^2}{2r} = \tfrac{9}{8}\frac{\partial^2}{r}.$$

Setzt man nun z. B. $\partial = 1^0$, so wird $\xi = 500$ Fuss, $\eta = \frac{1}{140}$ Fuss. Der Maximalabstand zwischen der Curve H und dem Normalschnitt beträgt also in diesem Falle noch keine volle Linie. Da nun die Längendifferenz zwischen beiden Curven noch weit geringer ist, so folgt, dass man für kürzere Entfernungen beide Curven ohne Bedenken mit einander vertauschen kann.

Es bleibt also nun die Aufgabe zu erledigen, den Längenunterschied zwischen dem Centralschnitt und der Curve H zu ermitteln. Das Differential der ersteren Linie ist durch die Gleichung 37), d. i. durch

$$ds_c = \frac{\sqrt{\alpha\beta}\ d\partial}{\varrho_{d_0} P^{3/2} \sin\zeta},$$

gegeben. Vergleicht man damit die 23), Cap. II, welche lautet:

$$ds = \frac{r.d\partial}{\sin\zeta},$$

so ist ersichtlich, dass der Ausdruck

$$\frac{\sqrt{\alpha\beta}\ .\ d\partial}{\varrho_{d_0} P^{3/2}}$$

ausschliesslich der durch die dirigirende Tangente gebildeten Cylinderfläche angehört und dasjenige Linienelement darstellt, welches auf der dirigirenden Tangente senkrecht steht. Daraus lässt sich sofort das Differential der Curve H ableiten, wenn man mit dem Sinus des Winkels divi-

dirt, den sie mit der dirigirenden Tangente einschliesst. Es kommt also darauf an, diesen Winkel — er mag ζ' genannt werden — zu ermitteln.

Denkt man sich eine Fläche zweiten Grades, welche den kaum erwähnten Cylinder in der Curve H berührt, so kann man die H als einen Centralschnitt dieser fingirten Fläche betrachten. Die Ebene der Curve fällt mit der Normale der Fläche zusammen; deshalb repräsentirt der Anfangspunkt der Linie einen äquatorealen Flächenpunkt. Da nun in diesem Falle die Gleichung 24) stattfindet, so ist damit auch schon der gesuchte Winkel ζ' gegeben. Es folgt nämlich

$$cotg\,\zeta' = cotg\,\zeta^0 \cos\partial$$

oder

$$\sin\zeta' = \frac{1}{\sqrt{1 + cotg\,\zeta^{02}\cos\partial^2}}.$$

Setzt man diesen Werth ein, so erhält man das Differential der Hilfscurve durch den Ausdruck

$$ds_h = \frac{\sqrt{\alpha\beta}\,.\,\sqrt{1 + cotg\,\zeta^{02}\cos\partial^2}}{\varrho_{d_0} P^{3/2}}.$$

In Bezug auf die Gleichungen 37) und 38) führen wir nun vorübergehend folgende Abkürzungen ein:

$$\frac{cotg\,\zeta_0^2}{\cos\pi^2\cos\alpha^2} = q^2,$$

$$\cos\pi\cos\alpha\cos\partial - \sin\pi\sin\partial = h\cos\partial - k\sin\partial = r,$$

$$\left(\frac{\gamma}{\varrho_{d_0}\alpha\beta} - 1 - \frac{l^2}{\alpha\beta}\right)\sin\partial^2 + \frac{2\,.\,d\ tg\,\pi\cos\alpha}{\alpha}\sin\partial\cos\partial$$
$$= m\sin\partial^2 + 2n\sin\partial\cos\partial = \eta.$$

Dadurch kommt

$$\alpha\beta\varrho_{d_0}\,.\,ds_c = \frac{\sqrt{1+q^2r^2}}{(1+\eta)^{3/2}} = \left(1 + \frac{q^2r^2}{2}\right)(1 - \tfrac{3}{2}\eta + \tfrac{15}{8}\eta^2 - \tfrac{35}{16}\eta^3)$$
$$= 1 - \tfrac{3}{2}\eta + \tfrac{15}{8}\eta^2 - \tfrac{35}{16}\eta^3 + \frac{q^2r^2}{2} - \tfrac{3}{4}q^2r^2\,.\,\eta.$$

Eine ähnliche Reihe erhält man für das Differential der Curve H, nämlich die folgende:

$$\alpha\beta\varrho_{d_0}\,.\,ds_h = 1 - \tfrac{3}{2}\eta + \tfrac{15}{8}\eta^2 - \tfrac{35}{16}\eta^3 + \frac{q_1^2 r_1^2}{2} - \tfrac{3}{4}q_1^2 r_1^2\eta,$$

worin man zu setzen hat

$$q_1 = cotg\,\zeta^0, \quad r_1 = \cos\partial^2.$$

Subtrahirt man beide Ausdrücke von einander, so erhält man

$$\alpha\beta\varrho_{d_0}(ds_c - ds_h) = (1 - \tfrac{3}{2}\eta)\left(\frac{q^2r^2 - q_1^2 r_1^2}{2}\right)d\partial.$$

Die Grössen η, q und q_1 sind von der Ordnung (e^2), daher folgt für das Product ηq^2 die Ordnung (e^6). Durch die Integration erhält dasselbe noch den Factor ∂^2 und wird verschwindend klein, wenn ∂ ein kleiner Winkel ist.

Man kann daher, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, das Glied $\frac{3}{2}\eta$ ganz vernachlässigen. Dadurch kommt

$$2\alpha\beta\varrho_{d_0}(ds_c - ds_h) = (q^2r^2 - q_1^2r_1^2)\,d\partial$$
$$= (q^2h^2\cos\partial^2 + q^2k^2\sin\partial^2 - 2q^2h.k\sin\partial\cos\partial - q_1^2\cos\partial^2)\,d\partial$$
$$= [(q^2h^2 - q_1^2) - (q^2h^2 - q_1^2)\,\partial^2 + q^2k^2\partial^2 - 2q^2hk\partial]\,d\partial,$$

und durch Integration

$$2\alpha\beta\varrho_{d_0}(s_c - s_h) = (q^2h^2 - q_1^2)\,\partial - q^2hk\partial^2 - (q^2h^2 - q_1^2)\frac{\partial^3}{3} + q^2k^2\frac{\partial^3}{3}.$$

Es sollen die Coefficienten dieser Reihe einzeln bestimmt werden. Man hat

$$q^2h^2 - q_1^2 = cotg\,\zeta_0^2 - cotg\,\zeta^{02} = \sin(\xi_0 + \xi^0)\sin(\xi_0 - \xi^0).$$

Es ist aber

$$\xi_0 = 90 - (\alpha - \varphi), \quad \xi^0 = 90 - (\alpha - \varphi) - (\varphi - a).$$

Setzt man für diese Grössen aus den §§ 7 und 8 die Näherungswerthe

$$\alpha - \varphi = -e^2\cos\pi^2\cos\alpha\sin\alpha \quad \text{und} \quad \varphi - a = e^2\cos\pi\sin\pi\sin\alpha.tg\frac{\partial}{2}$$

ein, so kommt

$$q^2h^2 - q_1^2 = e^4\cos\pi^3\sin\pi\cos\alpha\sin\alpha^2.\partial - e^4\cos\pi^2\sin\pi^2\sin\alpha^2.\frac{\partial^2}{4}.$$

Das zweite Glied giebt

$$q^2hk = \frac{cotg\,\zeta_0^2\sin\pi}{\cos\pi\cos\alpha} = e^4\cos\pi^3\sin\pi\cos\alpha\sin\alpha^2.$$

Das dritte Glied schwindet, wenn man die vierten Potenzen von ∂ vernachlässigt. Das vierte Glied giebt

$$q^2k^2 = \frac{cotg\,\zeta_0^2\sin\pi^2}{\cos\pi^2\cos\alpha^2} = e^4\cos\pi^2\sin\pi^2\sin\alpha^2.$$

Setzt man diese Werthe ein, so folgt schliesslich

49) $$s_c - s_h = \frac{\varrho.e^4\cos\pi^2\sin\pi^2.\sin\alpha^2\partial^3}{24}.$$

Daraus ist zu ersehen, dass die Differenz zwischen dem Centralschnitt und Normalschnitt verschwindend klein ist, sobald man es nur mit Linien von mässiger Grösse zu thun hat.

§ 16.

Rectification des Normalschnitts.

Die Flächengleichung 43), Cap. II, geht für das zweiaxige Ellipsoid in folgende über:

$$\alpha x_0^2 + \beta y_0^2 + \gamma z_0^2 + 2vx_0z_0 - 2z_0 = 0,$$

die man nach den Entwickelungen des zweiten Capitels auch schreiben kann:

$$\frac{x_0^2}{\varrho_0} + \frac{y_0^2}{\varrho_1} + \gamma.z_0^2 - 2d.tg\,\pi\,x_0z_0 - 2z_0 = 0.$$

Transformirt man dieselbe durch folgende Gleichungen:

$$x_0 = x\cos a - y\sin a,$$
$$y_0 = x\sin a + y\cos a,$$

worin a das von Nord nach West genommene Azimuth des Normalschnitts bedeutet, so kommt

$$x^2\left(\frac{\cos a^2}{\varrho_0}+\frac{\sin a^2}{\varrho_1}\right)+y^2\left(\frac{\sin a^2}{\varrho_0}+\frac{\cos a^2}{\varrho_1}\right)-2xy\sin a\cos a.d$$
$$+\gamma z^2-2d.tg\pi\,(x\cos a-y\sin a)\,z-2z=0.$$

Setzt man $y=0$, so erhält man die Gleichung des Normalschnitts, nämlich

$$\frac{x^2}{\varrho}+\gamma z^2-2.d.tg\pi\cos a.xz-2z=0.$$

Führt man andere Variabelen, und zwar die Sehne k und den Höhenwinkel q, durch die Gleichungen

$$x=k\cos q,\quad z=k\sin q$$

ein, so folgt

$$\frac{k^2\cos q^2}{\varrho}+\gamma k^2\sin q^2-2d.tg\pi\cos a.k^2\cos q\sin q-2k\sin q=0$$

oder

49 a) $$k=\frac{2q}{\frac{\cos q^2}{\varrho}+\gamma\sin q^2-2d\,tg\pi\cos a\cos q\sin q}.$$

Setzt man zur Abkürzung

49 b) $$d\,tg\pi\cos a=n,\quad\left(\frac{1}{\varrho}-\gamma\right)=t,$$

so geht die vorige Gleichung in folgende über:

50) $$k=\frac{2.\sin q}{\frac{1}{\varrho}-t\sin q^2-n\sin 2q}.$$

Für das Differential des Bogens hat man die allgemeine Gleichung

$$ds=dq\sqrt{k^2+k'^2},$$

wo k' den nach q genommenen Differentialquotienten bedeutet. Da k und k' Functionen von q sind, so kann man auch setzen

$$ds=dq.f(q).$$

Entwickelt man $f(q)$ nach der Reihe von Mac-Laurin, so kommt

51) $$f(q)=f(0)+q\,f'(0)+\frac{q^2}{2}f''(0)+\frac{q^3}{6}f'''(0).$$

Man hat die Constanten dieser Reihe durch die Grössen k, k', k'' etc. auszudrücken. Es folgt

$$f=\sqrt{k^2+k'^2},$$
$$ff'=kk'+k'k'',$$
52) $$ff''+f'^2=kk''+k'^2+k''^2+k'k''',$$
$$ff'''+3f'f''=kk'''+3k'k''+3k''k'''+k'k'''',$$
$$ff^{(4)}+4f'f'''+3f''^2=kk^{(4)}+4k'k'''+3k''^2+3k'''^2+4k''k^{(4)}+k'k^{(5)}.$$

Bezeichnet man in der 50) Zähler und Nenner vorübergehend mit u und v, so erhält man für die Derivationen k' etc. folgende Werthe:

53)
$$\begin{aligned}
&kv = u,\\
&k'v + kv' = u',\\
&k''v + kv'' + 2k'v' = u'',\\
&k'''v + kv''' + 3k''v' + 3k'v'' = u''',\\
&k^{(4)}v + kv^{(4)} + 4k'''v' + 4k'v''' + 6k''v'' = u^{(4)},\\
&k^{(5)}v + kv^{(5)} + 5k^{(4)}v + 5k'v^{(4)} + 10k'''v'' + 10k''v''' = u^{(5)}.
\end{aligned}$$

Differentiirt man nun die Grössen u und v nach q und setzt dann $q=0$, so kommt ferner

54)
$$\begin{aligned}
u &= 0, & v &= \frac{1}{\varrho},\\
u' &= 2, & v' &= -2n,\\
u'' &= 0, & v'' &= -2t,\\
u''' &= -2, & v''' &= 8n,\\
u^{(4)} &= 0, & v^{(4)} &= 8t,\\
u^{(5)} &= 2, & v^{(5)} &= -32n.
\end{aligned}$$

Mit diesen Werthen geht man zurück in die 53) und bekommt

$$\begin{aligned}
k_0 &= 0, & k_0''' &= 12\varrho^2 t + 48\varrho^3 n^2 - 2\varrho,\\
k'_0 &= 2\varrho, & k_0^{(4)} &= 192\varrho^3 nt + 384\varrho^4 n^3 - 80\varrho^2 n,\\
k''_0 &= 8\varrho^2 n, & k_0^{(5)} &= 2\varrho - 120\varrho^2 t + 240\varrho^3 t^2 - 1440\varrho^3 n^2 + 2880\varrho^4 n^2 t + 3840\varrho^5 n^4.
\end{aligned}$$

Führt man diese Grössen in die 52), so erhält man endlich die gesuchten Coefficienten, nämlich

$$\begin{aligned}
f_0 &= 2\varrho, & f_0''' &= -80\varrho^2 n + 192\varrho^3 nt + 384\varrho^4 n^3,\\
f'_0 &= 8\varrho^2 n, & f_0^{(4)} &= -144\varrho^2 t + \ldots.\\
f''_0 &= 12\varrho^2 t + 48\varrho^3 n^2.
\end{aligned}$$

Wird nun die 51) nach q integrirt, so kommt erstens

$$s = q f(0) + \frac{q^2}{2} f'(0) + \frac{q^3}{6} f''(0) + \tfrac{1}{24}\, q^4 f'''(0),$$

und substituirt man hierauf die vorigen Werthe für $f(0)$, $f'(0)$ etc., so folgt schliesslich für den Bogen des Normalschnitts der Ausdruck

55) $$\frac{s}{2\varrho} = q + 2\varrho n.q^2 + (\varrho t + 4\varrho^2 n^2)\, q^3 - (\tfrac{5}{3}\varrho n - 4\varrho^2 nt - 8\varrho^3 n^3)\, q^4 - \tfrac{3}{5}\varrho.t.q^5.$$

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass diese Formel nur für Linien von mässiger Ausdehnung gilt, weil die höheren Potenzen von q vernachlässigt worden sind.

In der Praxis kommt öfters die Aufgabe vor, den Winkel q zu ermitteln, wenn die Länge des Bogens s gegeben ist. Es macht sich daher nöthig, die vorige Gleichung umzukehren. Da wir bereits in § 12 eine Methode angegeben haben, nach welcher dies bewerkstelligt werden kann, so sehen wir jetzt von der speciellen Entwickelung ab und führen nur das Resultat an. Man erhält nämlich, wenn $\frac{s}{2\varrho} = \psi$ gesetzt wird:

56) $$q = \psi - 2\varrho n\psi^2 + (4\varrho^2 n^2 - \varrho t)\, \psi^3 + (\tfrac{5}{3}\varrho n + 6\varrho^2 nt)\, \psi^4 + \tfrac{3}{5}\varrho.t.\psi^5.$$

Schliesslich soll noch eine Gleichung zwischen dem Bogen und der Sehne entwickelt werden. Man hat allgemein

$$k = k_0 + q.k'_0 + \frac{q^2}{2}k''_0 + \frac{q^3}{3!}k'''_0 + \frac{q^4}{4!}k''''_0 + \frac{q^5}{5!}k^{(5)}_0.$$

Setzt man für k_0, k'_0 etc. die oben entwickelten Werthe ein, so folgt

$$57) \quad k = 2\varrho\left[q + 2\varrho n q^2 + (\varrho t + 4\varrho^2 n^2 - \tfrac{1}{6})\,q^3 - (\tfrac{5}{3}\varrho n - 4\varrho^2 nt - 8\varrho^3 n^3)\,q^4 + \left(\tfrac{1}{120} - \frac{\varrho t}{2}\right)q^5\right].$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der 55), so kommt

$$\frac{s-k}{2\varrho} = \tfrac{1}{6}q^3 - (\tfrac{1}{10}\varrho t + \tfrac{1}{120})\,q^5$$

oder

$$58) \quad s - k = \frac{\varrho.q^3}{3} - \left(\frac{\varrho}{60} + \frac{\varrho^2 t}{5}\right)q^5.$$

§ 17.

Wir kommen nochmals auf die sphärische Correction zurück. Zur Ermittelung derselben bedarf man, wie die Formel 22) zeigt, des Höhenwinkels q. Dieser Winkel ist aber in der Praxis nicht direct gegeben, sondern muss erst mittels der Formel 56) berechnet werden. Hat man es nur mit gewöhnlichen Dreiecksseiten, die nicht länger, als 10 bis 15 Meilen sind, zu thun, so vereinfacht sich der Ausdruck für q derart, dass man ihn ohne Weiteres in die 22) substituiren kann. Es schwinden nämlich in solchen Fällen sämmtliche Glieder, welche mit höheren Potenzen der Grösse ψ behaftet sind, und bleibt nur das erste Glied zu berücksichtigen. Schreibt man dasselbe in der Form

$$q = \frac{s}{2\varrho} = \frac{s}{2\varrho_1} + \frac{s.d}{2}\cos a^2$$

und setzt diesen Ausdruck in die 22), so folgt

$$59) \quad w = \frac{s.\sin a.tg\,\varepsilon}{2\varrho_1} + \frac{s}{2}\sin a\,tg\,\varepsilon\,.\,d\cos a^2 - \frac{e^2\cos\pi^2}{1-e^2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{e^4\cos\pi^4}{(1-e^2)^2}\sin\varphi\cos\varphi^3.$$

Dem Factor $tg\frac{\varepsilon.d}{2}$ im zweiten Gliede der vorigen Gleichung kann man eine andere Gestalt geben. Aus der Entwickelung der Constanten der Gleichung 38) in § 11 geht hervor, dass

$$\varrho_0 d.tg\,\pi = tg\,\varepsilon.$$

Daraus folgt durch Annäherung

$$\frac{tg\,\varepsilon.d}{2} = \frac{tg\,\varepsilon^2}{2\varrho_0 tg\,\pi} = \frac{tg\,\varepsilon^2}{2\varrho_1\,tg\,\pi} = \frac{tg\,\varepsilon}{2\varrho_1}\cdot\frac{e^2\cos\pi\sin\pi\cos\pi}{(1-e^2\sin\pi^2)\sin\pi} = \frac{tg\,\varepsilon}{2\varrho_1}\,\frac{e^2\cos\pi^2}{1-e^2}.$$

Setzt man den letzten Ausdruck in die 59), so kommt schliesslich

$$60) \quad w = \frac{tg\,\varepsilon}{2\varrho_1} \cdot s.sin\,a + \frac{tg\,\varepsilon}{2\varrho_1} \cdot \frac{e^2 \cos\pi^2}{1-e^2} \cdot s.\,sin\,a\,cos\,a^2 - \frac{e^2 \cos\pi^2}{1-e^2} \sin\varphi \cos\varphi + \frac{e^4 \cos\pi^4}{(1-e^2)^2} \sin\varphi \cos\varphi^3.$$

Auch diese Methode zur Berechnung der sphärischen Correction soll durch ein Beispiel erläutert werden. Wir entnehmen dazu die erforderlichen Daten aus den vorhergehenden numerischen Berechnungen. Demnach ist gegeben:

$$\pi = 52^0\,30'\,16{,}7'',$$
$$a = 59^0\,33'\,0{,}93'',$$
$$log\,s = 5{,}4344393.$$

Der Winkel q muss in diesem Falle nach der Formel 56) berechnet werden, weil das zweite Glied dieser Gleichung nicht vernachlässigt werden kann. Setzt man angenähert

$$2\varrho n = e^2\,sin\,2\pi\,cos\,a,$$

so folgt

$$tg\,q = 8{,}618140,$$

und bestimmt man nun mittels der 18) und 22) das Azimuth des Centralschnitts, so kommt ferner

$$tg\,q = 8{,}618140 \quad (56),$$
$$tg\,\varepsilon = 7{,}510126 \quad (15),$$
$$sin\,a = 9{,}935557$$
$$log\,(\varphi - a) = 6{,}063823 \quad (18), \quad (\varphi - a) = 23{,}89'', \quad \varphi = 59^0\,33'\,24{,}82''.$$

Zur Ermittelung der sphärischen Correction kann man sich nunmehr der letzten Glieder der 60) bedienen. Es folgt

$\frac{e^2 \cos\pi^2}{1-e^2} = 7{,}396122,$	$\frac{e^4 \cos\pi^4}{(1-e^2)^2} = 5{,}7922,$	$I = -224{,}314,$
$sin\,\varphi = 9{,}935573,$	$sin\,\varphi = 9{,}9356,$	$II = \quad 0{,}143,$
		$-224{,}171,$
$cos\,\varphi = 9{,}704736$	$cos\,\varphi^3 = 9{,}1142$	$\varphi - a = \quad 23{,}89$
$7{,}036431,$	$3{,}8420$	$w = -200{,}28$
$sin\,1'' \quad 4{,}685575$	$4{,}6856$	oder
$2{,}350856,$	$0{,}1564 - 1$	
$I = -224{,}314'',$	$II = +0{,}143'',$	$-w = 3'\,20{,}28''.$

Das Resultat stimmt also mit der Berechnung in § 4.

§ 18.

Zum Schlusse erörtern wir noch die Aufgabe, von einem gegebenen Punkte aus Länge, Breite und Azimuth auf ein grösseres Dreiecksnetz zu übertragen. Es können dabei verschiedene Methoden zur Anwendung kommen. Entweder gebraucht man, sobald das sphärische Azimuth am An-

fangspunkte bestimmt worden ist, die Gleichung 45) oder 46), um mittels der Bogenlänge σ zum nächsten Punkte zu gelangen, und setzt dann dieses Verfahren bis ans Ende des Netzes fort, oder man operirt nach Art der Triangulation. Sind nämlich zwei benachbarte Punkte des Netzes bekannt, so wird die Verbindungslinie derselben als die Basis eines Dreiecks betrachtet, dessen Theile bestimmt werden sollen. Man berechnet nun zuerst die sphärischen Azimuthe der anliegenden Seiten und erhält dadurch nicht allein die beiden anliegenden Dreieckswinkel, sondern in Hinsicht auf die Erörterungen des § 7, Cap. I, und § 3, Cap. III, auch zugleich den dritten dieser Winkel. Die so ermittelten Grössen sind mehr als ausreichend, um auch die übrigen Theile des Dreiecks, sowie Länge, Breite und Azimuth des dritten Punktes berechnen zu können. In dieser Weise kann man, ohne dass die Seitengleichung 45) zur Anwendung kommt, successive weiter gehen, bis alle Punkte bekannt sind. Das ganze sphäroidische Netz wird dadurch in ein sphärisches umgewandelt und jeder sphärischen Dreiecksseite entspricht ein Centralschnitt auf dem Sphäroid.

B. Einiges über das dreiaxige Ellipsoid.

§ 19.

Die im vorigen Abschnitt entwickelten allgemeinen Formeln nehmen ihre einfachste Gestalt an, sobald man sie auf einen äquatorealen Punkt der Fläche bezieht. Deshalb gehen wir bei der Discussion des Ellipsoids ebenfalls von einem solchen Punkte aus und wählen dazu namentlich den Pol der Z-Axe. Für die beiden Hauptkrümmungen an diesem Punkte hat man bekanntlich die einfachen Gleichungen

$$61) \qquad \frac{1}{\varrho_1} = \frac{c}{a^2}, \quad \frac{1}{\varrho_0} = \frac{c}{b^2}.$$

Die übrigen Krümmungen drücken wir durch die Länge λ aus. Dieselbe wird von der Richtung der grössten Krümmung aus gerechnet und entspricht dem sphärischen Azimuth des Centralschnitts. Da nun die Tangente des sphärischen Azimuths senkrecht auf der dirigirenden Tangente lmn steht, so erhält man für die Richtungsgrössen der letzteren ohne Weiteres die Werthe

$$l = \sin\lambda, \quad m = -\cos\lambda, \quad n = 0.$$

Diese Grössen liefern in Verbindung mit denen der 61) einen Ausdruck für den Krümmungsradius ϱ_{d_0}. Es folgt nach bekannter Formel

$$\frac{1}{\varrho_{d_0}} = \frac{c}{b^2}\sin\lambda^2 + \frac{c}{a^2}\cos\lambda^2 = \frac{c}{b^2}\left(1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\cos\lambda^2\right).$$

Führt man die Abkürzungen ein:

$$62) \qquad \frac{a^2-c^2}{a^2} = e^2, \quad \frac{b^2-c^2}{b^2} = e_1^2, \quad \frac{a^2-b^2}{a^2} = e_2^2,$$

so geht die vorige Gleichung in folgende über:

63 a) $$\frac{1}{\varrho_{d_0}} = \frac{c}{b^2}(1-e_2^2\cos\lambda^2) = (1-e_1^2)(1-e_2^2\cos\lambda^2).$$

Es ist nun leicht, auch für den Krümmungsradius des Centralschnitts eine Gleichung aufzustellen. Man erhält nämlich durch die Formel 20), Cap. II, unter Berücksichtigung der 63 a):

63 b) $$\frac{1}{\varrho_{c_0}} = \frac{\varrho_{d_0}\sin\xi_0^2}{\varrho_0\varrho_1} = \frac{c}{a^2}\frac{\sin\xi_0^2}{(1-e_2^2\cos\lambda^2)} = \frac{(1-e^2)\sin\xi_0^2}{(1-e_2^2\cos\lambda^2)}.$$

Schliesslich bleibt noch der Winkel ξ_0 zwischen den conjugirten Tangenten zu ermitteln. Aus den beiden Gleichungen 12 a) und 17) des zweiten Capitels lässt sich unmittelbar die folgende ableiten:

$$cotg\,\xi_0 = \varrho_{d_0}.d.\cos\varphi\sin\varphi,$$

worin φ das Azimuth der dirigirenden Tangente vorstellt. Führt man auch hier die Länge λ und die Ausdrücke für ϱ_{d_0} und d ein, so kommt

$$cotg\,\xi_0 = -\varrho_{d_0}.d.\cos\lambda\sin\lambda = -c\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{\cos\lambda\sin\lambda}{(1-e_2^2\cos\lambda^2)}\cdot\frac{b^2}{c}$$

oder schliesslich

64) $$cotg\,\xi_0 = -\frac{e_2^2\cos\lambda\sin\lambda}{1-e_2^2\cos\lambda^2},\quad \cos\xi_0 = -\frac{e_2^2\cos\lambda\sin\lambda}{\sqrt{1-2e_2^2\cos\lambda^2+e_2^4\cos\lambda^2}},$$
$$\sin\xi_0 = \frac{1-e_2^2\cos\lambda^2}{\sqrt{1-2e^2\cos\lambda^2+e_2^4\cos\lambda^2}}$$

§ 20.

Wir nehmen nun einen beliebigen Punkt des Ellipsoids vor, verbinden ihn mit dem Pole durch einen Centralschnitt und entwickeln die bezüglichen Grössen. Den Winkel zwischen der dirigirenden Tangente und dem Centralschnitt erhält man durch die Gleichung 24), welche lautet:

$$cotg\,\xi_1 = cotg\,\xi_0\cos\partial.$$

Im vorliegenden Falle ist ∂ das Complement der Breite; man hat demnach

65) $$cotg\,\xi_1 = cotg\,\xi_0\sin\pi = -\frac{e_2^2\cos\lambda\sin\lambda\sin\pi}{1-e_2^2\cos\lambda^2}.$$

Die Krümmungsradien ϱ_c und ϱ_d sind durch die Gleichungen 35) und 36), nämlich durch die folgenden:

$$\frac{1}{\varrho_d} = \frac{\sqrt{\varrho_0\varrho_1}}{\varrho_{d_0}}\cdot P^{1/2},\quad \frac{1}{\varrho_c} = \varrho_{d_0}\sqrt{\varrho_0\varrho_1}\cdot P^{3/2}\sin\xi_1^2$$

gegeben. Der Ausdruck für P [siehe Gleichung 28)] nimmt jetzt, wo der Anfangspunkt im Pole liegt, die einfachere Gestalt an:

$$P_0 = \alpha\beta\cos\partial^2 + \frac{\gamma}{\varrho_{d_0}}\sin\partial^2 = \frac{\gamma}{\varrho_{d_0}} - \left(\frac{\gamma}{\varrho_{d_0}} - \alpha\beta\right)\sin\pi^2.$$

Entwickelt man die Constanten desselben und berücksichtigt, dass $\gamma = \frac{1}{c}$ ist, so kommt

$$\frac{\gamma}{\varrho_{d_0}} = \frac{1}{b^2}(1 - e_2^2 \cos\lambda^2),$$

$$\frac{\gamma}{\varrho_{d_0}} - \alpha\beta = \frac{1}{b^2}(1 - e_2^2 \cos\lambda^2) - \frac{c^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{b^2}(e^2 - e_2^2 \cos\lambda^2).$$

Setzt man diese Grössen ein, so folgt

$$P_0 = \left(\frac{1 - e_2^2 \cos\lambda^2}{b^2}\right)\left[1 - \frac{(e^2 - e_2^2 \cos\lambda^2)\sin\pi^2}{1 - e_2^2 \cos\lambda^2}\right).$$

Wird dieser Ausdruck abgekürzt durch die Bezeichnungen

66 a) $$1 - e_2^2 \cos\lambda^2 = \Delta_\lambda, \quad 1 - \frac{e^2 - e_2^2 \cos\lambda^2}{1 - e_2^2 \cos\lambda^2} \sin\pi^2 = \Delta_\pi,$$

so erhält man endlich

66 b) $$P_0 = \frac{\Delta_\lambda \cdot \Delta_\pi}{b^2}.$$

Nunmehr sind noch die constanten Coefficienten in den Gleichungen der Krümmungsradien zu ermitteln. Es kommt

$$\frac{\sqrt{\varrho_0 \varrho_1}}{\varrho_{d_0}} = \frac{ab}{c} \cdot \frac{c}{b^2} \Delta_\lambda = \frac{a}{b} \Delta_\lambda,$$

$$\varrho_{d_0} \cdot \sqrt{\varrho_0 \varrho_1} = \frac{ab}{c} \cdot \frac{b^2}{c} \frac{1}{\Delta_\lambda} = \frac{ab^3}{c^2 \Delta_\lambda}.$$

Führt man diese Ausdrücke und den für P_0 oben ein, so erhält man endlich folgende Werthe:

67) $$\frac{1}{\varrho_d} = \frac{a}{b^2} \Delta_\lambda^{3/2} \cdot \Delta_\pi^{1/2},$$

$$\frac{1}{\varrho_c} = \frac{a}{c^2} \Delta_\lambda^{1/2} \cdot \Delta_\pi^{3/2} \sin\zeta_1^2.$$

ϱ_c ist, wie bekannt, der Krümmungsradius des vom Pole ausgehenden Centralschnitts, ϱ_d gehört der Richtung der dirigirenden Tangente an.

§ 21.

Schreibt man den Ausdruck für einen beliebigen Krümmungsradius eines Flächenpunktes in der Form

$$\frac{\varrho \cos\varphi^2}{\varrho_0} + \frac{\varrho \sin\varphi^2}{\varrho_1} = 1$$

und setzt

$$\sqrt{\varrho} \cos\varphi = x, \quad \sqrt{\varrho'} \sin\varphi = y,$$

so erhält man die Gleichung einer Ellipse, nämlich

$$\frac{x^2}{\varrho_0} + \frac{y^2}{\varrho_1} = 1.$$

Die Differentiation derselben giebt für die Tangente der Ellipse den Ausdruck

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{\varrho_1}{\varrho_0}.$$

Bezeichnet man die Winkel, welche der Radius vector und die Tangente mit der x-Axe einschliessen, beziehungsweise mit φ und $\varphi+\zeta_1$, so folgt

$$tg\,\varphi\; tg(\varphi+\zeta_1) = -\frac{\varrho_1}{\varrho_0}.$$

Diese Gleichung ist identisch mit der 12b) in Cap. II. Daraus erhellt, dass sich die conjugirten Durchmesser der Ellipse und die den conjugirten Tangenten angehörigen Krümmungsradien vollkommen entsprechen. Man hat daher nach der Theorie der Ellipse die Relation

$$\varrho_c + \varrho_d = \varrho_0 + \varrho_1 = Const.$$

und ferner die übrigens schon auf anderem Wege entwickelte Gleichung

$$\varrho_c \varrho_d \sin\zeta_1^{\,2} = \varrho_0 \varrho_1.$$

Daraus lassen sich ohne Schwierigkeit die Radien der Hauptkrümmungen ableiten. Man erhält nach einer kurzen Entwickelung

66)
$$\varrho_0 = \tfrac{1}{2}(\varrho_c+\varrho_d) - \sqrt{\tfrac{1}{4}(\varrho_d-\varrho_c)^2 + \varrho_d\varrho_c \cos\zeta_1^{\,2}},$$
$$\varrho_1 = \tfrac{1}{2}(\varrho_d+\varrho_c) + \sqrt{\tfrac{1}{4}(\varrho_d-\varrho_c)^2 + \varrho_d\varrho_c \cos\zeta_1^{\,2}}.$$

§ 22.

Meridian, Mittagslinie und Hauptschnitte.

Der vom Pole ausgehende Centralschnitt hat mit dem Meridian der Rotationsfläche die Eigenschaften gemein, dass er eine ebene Curve bildet und dass alle Punkte desselben gleiche Länge haben. Wir wollen daher, um keinen neuen Ausdruck einführen zu müssen, diese Curve ebenfalls den Meridian nennen. Verschieden davon ist die Mittagslinie, die bekanntlich die Richtung angiebt, in welcher der Culminationspunkt der Sonne oder eines Sternes liegt. Sie fällt in die Ebene, welche die Flächennormale mit einer Parallelen zur Rotations- oder Z-Axe verbindet, und steht daher senkrecht zur dirigirenden Tangente des Meridians. Der Unterschied beider Richtungen (Meridian und Mittagslinie) lässt sich leicht ermitteln. Bezeichnet man denselben mit η_0, so hat man die Relation

$$\zeta_1 = 90 - \eta_0,$$

und aus der 65) folgt

69)
$$tg\,\eta_0 = \frac{-e_2^{\,2}\cos\lambda\sin\lambda\sin\pi}{1-e_2^{\,2}\cos\lambda^2}.$$

Wir gehen nun zur Winkeldifferenz über, welche zwischen der Richtung der grössten Krümmung und dem Meridian stattfindet. Bezeichnet man dieselbe mit φ_0, so nimmt der Winkel zwischen der dirigirenden Tangente und der grössten Krümmung den Werth $\varphi_0 - \zeta_1$ an. Beide Winkel lassen sich durch die Gleichung 12a), Cap. II, verbinden. Es kommt nämlich

$$\cos\zeta_1 = \frac{d\cos(\varphi_0-\zeta_1)\sin(\varphi_0-\zeta_1)}{\partial'_{(\varphi_0-\zeta_1)}} = \frac{-d\cos\varphi_0\sin\varphi_0}{\partial'_{(\varphi_0)}},$$

$$\frac{\sin 2(\varphi_0-\zeta_1)}{\sin 2\varphi_0} = \frac{-\partial'_{(\varphi_0-\zeta_1)}}{\partial'_{(\varphi_0)}} = \frac{-\varrho_{(\varphi_0)}}{\varrho_{(\varphi_0-\zeta_1)}} = \frac{-\varrho_c}{\varrho_d},$$

$$\frac{\sin 2\varphi_0\cos 2\zeta_1 - \cos 2\varphi_0\sin 2\zeta_1}{\sin 2\varphi_0} = \frac{-\varrho_c}{\varrho_d}.$$

Daraus folgt schliesslich

70) $$tg\,2\varphi_0 = \frac{\sin 2\zeta_1}{\cos 2\zeta_1 + \frac{\varrho_c}{\varrho_d}}.$$

Es sollen nun die einzelnen Grössen dieser Gleichung entwickelt werden. Durch die 67) erhält man

$$\frac{\varrho_c}{\varrho_d} = \frac{a\,c^2}{b^2\,a}\cdot\frac{\Delta\lambda^{3/2}\,\Delta\pi^{1/2}}{\Delta\lambda^{1/2}\,\Delta\pi^{3/2}\sin\zeta_1^{\,2}} = \frac{c^2\,\Delta\lambda}{b^2\,\Delta\pi\sin\zeta_1^{\,2}} = \frac{(1-e_1^{\,2})\,(1-e_2^{\,2}\cos\lambda^2)^2}{(1-e_2^{\,2}\cos\lambda^2\cos\pi^2 - e^2\sin\pi^2)\sin\zeta_1^{\,2}}.$$

Die 65) giebt, wenn nur die vierten Potenzen von e_2 oder die zweiten von $cotg\,\zeta_0$ beibehalten werden:

$$\sin\zeta_1^{\,2} = \frac{\sin\zeta_0^{\,2}}{1-\cos\zeta_0^{\,2}\cos\pi^2} = \sin\zeta_0^{\,2} + \cos\zeta_0^{\,2}\cos\pi^2 = 1-\cos\zeta_0^{\,2}\sin\pi^2,$$

oder schliesslich

$$\sin\zeta_1^{\,2} = 1 - e_2^{\,4}\cos\lambda^2\sin\lambda^2\cos\pi^2.$$

Führt man diese Grösse ein, so kommt

$$\frac{\varrho_c}{\varrho_d} = \frac{1-2e_2^{\,2}\cos\lambda^2 + e_2^{\,4}\cos\lambda^4 - e_1^{\,2} + 2e_1^{\,2}e^2\cos\lambda^2 + e_2^{\,4}\cos\lambda^2\sin\lambda^2\sin\pi^2}{1-e^2\sin\pi^2 - e_2^{\,2}\cos\lambda^2\cos\pi^2}$$

$$= \frac{1-e^2+e_2^{\,2}(1-e_1^{\,2}) - 2e_2^{\,2}\cos\lambda^2(1-e_1^{\,2}) + e_2^{\,4}\cos\lambda^2\sin\lambda^2\sin\pi^2 + e_2^{\,2}\cos\lambda^4}{1-e^2\sin\pi^2 - e_2^{\,2}\cos\lambda^2\cos\pi^2}$$

$$= \frac{1-e^2}{1-e^2\sin\pi^2}\left[1 - e_2^{\,2}\frac{1-e_1^{\,2}}{1-e^2}\cos 2\lambda + \frac{e_2^{\,4}\cos\lambda^2\sin\lambda^2\sin\pi^2}{1-e^2} + \frac{e_2^{\,4}\cos\lambda^4}{1-e^2}\right.$$

$$\left. + \frac{e_2^{\,2}\cos\lambda^2\cos\pi^2}{1-e^2\sin\pi^2} - e_2^{\,4}\frac{1-e_1^{\,2}}{1-e^2}\,\frac{\cos 2\lambda\cos\lambda^2\cos\pi^2}{1-e^2\sin\pi^2}\right].$$

Zieht man die Glieder zusammen und bezeichnet den Ausdruck

$$(1-e^2) : 1-e^2\sin\pi^2,$$

den der Quotient $\varrho_c : \varrho_d$ für das zweiaxige Ellipsoid annehmen würde, mit u_0, so kommt schliesslich

71) $$\frac{\varrho_c}{\varrho_d} = u_0 - \frac{u_0\,e_2^{\,2}\cos 2\lambda}{1-e_2^{\,2}} + \frac{u_0^{\,2}\,e_2^{\,2}\cos\lambda^2\cos\pi^2}{1-e^2} + e_2^{\,4}\cos\lambda^2(1-\cos\lambda^2\cos\pi^2\sin\pi^2).$$

Für die übrigen Grössen der Gleichung 70) entwickelt man aus der 65) leicht folgende Ausdrücke:

72) $$\sin 2\zeta_1 = \frac{-2(1-e_2^{\,2}\cos\lambda^2)\,e_2^{\,2}\cos\lambda\sin\lambda\sin\pi}{1-2e_2^{\,2}\cos\lambda^2 + e_2^{\,4}\cos\lambda^2(1-\sin\lambda^2\cos\pi^2)},$$

$$\cos 2\zeta_1 = -\frac{1-2e_2^{\,2}\cos\lambda^2 + e_2^{\,4}\cos\lambda^2(\cos\lambda^2 - \sin\lambda^2\sin\pi^2)}{1-2e_2^{\,2}\cos\lambda^2 + e_2^{\,4}\cos\lambda^2(1-\sin\lambda^2\cos\pi^2)}.$$

Sucht man einen genaueren Werth des Winkels φ_0, so hat man diese Ausdrücke, die sich möglicherweise noch vereinfachen lassen, in die 70) einzuführen. Kommt es aber nur darauf an, eine Formel zu gewinnen, wodurch sich in leichter Weise ein genäherter Werth des Winkels φ_0 berechnen lässt, so kann man die vierten Potenzen von e_2 vernachlässigen, und dann geht die Gleichung 70) in folgende über:

$$73) \qquad tg\,2\,\varphi_0 = \frac{-\,e_2^{\,2}\,sin\,2\lambda\,sin\,\pi}{-\,e_2^{\,2}\,cos\,2\lambda - e^2\,cos\,\pi^2 + e_2^{\,2}\,cos\,\lambda^2\,cos\,\pi^2}.$$

General Schubert fand aus der Zusammenstellung vieler Gradmessungen, dass der Aequator eine Abplattung von $\frac{1}{8000}$, also eine Excentrität von nahe $\frac{1}{4000}$ habe. Berechnet man damit beispielsweise für $\lambda = 45^0$ verschiedene Werthe des Winkels φ_0, so kommt:

für $\pi = 90^0$ ist	$\varphi_0 = 45^0 -'$,	für $\pi = 40^0$ ist	$\varphi_0 = 1^0 12'$,
„ „ $= 80^0$ „	„ $= 25^0 38'$,	„ „ $= 30^0$ „	„ $= -^0 44'$,
„ „ $= 70^0$ „	„ $= 8^0 31'$,	„ „ $= 20^0$ „	„ $= -^0 25'$,
„ „ $= 60^0$ „	„ $= 3^0 46'$,	„ „ $= 10^0$ „	„ $= -^0 12'$,
„ „ $= 50^0$ „	„ $= 2^0 1'$,	„ „ $= 0^0$ „	„ $= -^0 0'$.

Man sieht daraus, dass sich die Richtung der Hauptkrümmung von höheren nach niederen Breiten hin der Richtung des Meridians ziemlich rasch nähert.

§ 23.

Der Winkel zwischen den conjugirten Tangenten beliebiger Richtungen.

Die Winkel zwischen den conjugirten Tangenten sind sonst immer durch die Grössen der Hauptkrümmungen ausgedrückt worden; es ist aber vortheilhafter, sie auf den Meridian und auf die dirigirende Tangente desselben zu beziehen, sobald man es mit einem dreiaxigen Ellipsoid zu thun hat. Um dies zu bewerkstelligen, geht man auf die in § 21 entwickelte Ellipsengleichung zurück. Dieselbe gilt ihrer Form nach bekanntlich auch für schiefwinklige Coordinaten, wenn man nur die Axe der letzteren mit conjugirten Durchmessern der Ellipse zusammenfallen lässt. Legt man daher diese Axen in die Richtungen des Meridians und der dirigirenden Tangente, so erhält man die Gleichung

$$\frac{x_1^{\,2}}{\varrho_e} + \frac{y_1^{\,2}}{\varrho_d} = 1.$$

Wird nun der Winkel, den die Richtung, deren conjugirte Tangente gesucht werden soll, mit dem Meridian bildet, mit ψ und der Coordinatenwinkel mit ζ_1 bezeichnet, so kommt ferner

$$x_1 = \frac{\sqrt{\varrho}\,sin\,(\zeta_1 - \psi)}{sin\,\zeta_1}, \qquad y_1 = \frac{\sqrt{\varrho}\,sin\,\psi}{sin\,\zeta_1}.$$

Durch die Substitution dieser Ausdrücke folgt für einen beliebigen Krümmungsradius ϱ, welcher der Richtung ψ entspricht, die Gleichung

74a) $$\frac{\sin(\zeta_1-\psi)^2}{\varrho_c}+\frac{\sin\psi^2}{\varrho_d}=\frac{\sin\zeta_1^2}{\varrho}.$$

Die conjugirte Tangente wird dadurch gefunden, dass man die Gleichung der Ellipse differentiirt. Es kommt

$$\frac{dy_1}{dx_1}=-\frac{\varrho_d}{\varrho_c}\cdot\frac{x_1}{y_1}=-\frac{\varrho_d}{\varrho_c}\cdot\frac{\sin(\zeta_1-\psi)}{\sin\psi}.$$

Bezeichnet man nun den Winkel zwischen den conjugirten Tangenten mit ζ, so folgt für den Winkel zwischen der Axe ϱ_c und der Tangente $\frac{dy_1}{dx_1}$ der Werth $\psi+\zeta$ und man erhält auf geometrischem Wege leicht die Relationen

$$dx_1=\frac{ds\sin(\zeta_1+\psi+\zeta)}{\sin\zeta_1},\quad dy_1=\frac{ds\sin(\psi+\zeta)}{\sin\zeta_1}.$$

Daraus folgt

$$\frac{dx_1}{dy_1}=\frac{\sin(\zeta_1+\psi+\zeta)}{\sin(\psi+\zeta)}=\frac{\sin\zeta_1\cos(\psi+\zeta)+\cos\zeta_1\sin(\psi+\zeta)}{\sin(\psi+\zeta)}=-\frac{\varrho_c}{\varrho_d}\frac{\sin\psi}{\sin(\zeta_1-\psi)},$$

ferner

$$\operatorname{cotg}(\psi+\zeta)=-\operatorname{cotg}\zeta_1-\frac{\varrho_c}{\varrho_d}\frac{\sin\psi}{\sin(\zeta_1-\psi)\sin\zeta_1}$$

oder auch

74b) $$\operatorname{tg}(\psi+\zeta)=-\frac{\sin\zeta_1}{\cos\zeta_1+\frac{\varrho_c}{\varrho_d}\frac{\sin\psi}{\sin(\zeta_1-\psi)}}.$$

§ 24.

Azimuth des Centralschnitts und sphärisches Azimuth.

Im vorigen Paragraphen wurde der Winkel zwischen dem Centralschnitt und dem Meridian mit $\psi+\zeta$ bezeichnet. Von der Richtung des Meridians ist die Richtung der Mittagslinie, wie aus dem § 22 hervorgeht, um den kleinen Winkel η_0 verschieden. Daher erhält man das Azimuth φ des Centralschnitts durch die Gleichung

75) $$\varphi=\psi+\zeta-\eta_0.$$

Ebenso findet sich für das sphärische Azimuth α die Relation

76) $$\alpha=90+\psi-\eta_0.$$

Man kann in folgender Weise von der einen dieser beiden Richtungen zur andern übergehen. Sobald das sphärische Azimuth bekannt ist, bestimmt man durch die 76) den Winkel ψ, hierauf durch die 74) den Winkel $\psi+\zeta$ und schliesslich nach der 75) das Azimuth des Centralschnitts.

Ist umgekehrt das Azimuth des Centralschnitts gegeben, so setzt man

77) $$\psi=\varphi+\eta_0,$$

führt diesen Werth in die 74) und erhält den Winkel $\psi + \xi$. Aus diesem folgt dann das sphärische Azimuth durch die Relation

78) $$\alpha = \psi + \xi - 90 - \eta_0.$$

§ 25.

In einem der früher berechneten Beispiele wurde das Azimuth des Centralschnitts $\pi_1 \pi_2$ unter der Voraussetzung eines zweiaxigen Ellipsoids bestimmt. Wir ermitteln jetzt dieselbe Grösse, nehmen aber an, dass das Ellipsoid ein dreiaxiges sei, der Aequator die Excentricität $\frac{1}{4000}$ habe und dass der Punkt π_1 unter dem 135. Grade der Länge liege.

Zählt man das Azimuth von Nord nach West, so entnimmt man dem § 4 noch folgende Data:

$$\pi_1 = 52^0\,30'\,16{,}7'',$$
$$\alpha = 360^0 - 59^0\,29'\,40{,}65''.$$

Ferner hat man

$$log\, e_2^2 = 6{,}3979400,$$
$$\lambda = 135^0.$$

Mittels dieser Grössen berechnet man durch die 69) zuerst den Winkel η_0 und erhält

$$\eta_0 = -\, e_2^2 \cos\lambda \sin\lambda \sin\pi_1 (1 + e_2^2 \cos\lambda^2) = 20{,}46''.$$

Hierauf bestimmt man den Winkel ψ durch die 76):

$$\psi = \alpha + \eta_0 - 90 = 270^0 - 59^0\,29'\,20{,}19'',$$
$$\xi_1 - \psi = 180^0 - \alpha - 2\eta_0 = -\,180^0 + 59^0\,28'\,59{,}73''.$$

Die Formel 71) giebt nun die Grösse $\frac{\varrho_e}{\varrho_d}$, und zwar zuerst

$$log\, u_0 = 9{,}9989201,$$

dann

$$log \frac{\varrho_e}{\varrho_d} = 9{,}9989403.$$

Benutzt man diese numerischen Grössen zur Berechnung der 74), so kommt endlich

$$\psi + \xi = 360^0 - 59^0\,32'\,39{,}69'',$$

und ferner durch die 75)

$$\varphi = 360^0 - 59^0\,33'\,0{,}15''.$$

Beim zweiaxigen Ellipsoid war, wie § 17 zeigt:

$$\varphi = 360^0 - 59^0\,33'\,24{,}82''.$$

§ 26.

Winkel zwischen der Centrale und Normale.

Man hat für die Richtungsgrössen der Normale und Centrale beziehungsweise die Ausdrücke

$$p, \quad q, \quad r,$$
$$\frac{a^2 p}{t_0}, \quad \frac{b^2 q}{t_0}, \quad \frac{c^2 r}{t_0}.$$

Daraus folgt der Winkel zwischen beiden Linien durch die Gleichung

$$\cos\varepsilon = \frac{a^2p^2 + b^2q^2 + c^2r^2}{\sqrt{a^4p^2 + p^4q^2 + c^4r^2}}.$$

Es ist aber

$$p = \cos\pi\sin\lambda, \quad q = \cos\pi\cos\lambda, \quad r = \sin\pi.$$

Setzt man diese Werthe ein, so findet man nach einer kurzen Entwickelung

$$79) \quad \cos\varepsilon = \frac{1 - e^2\sin\pi^2 - e_2^2\cos\lambda^2\cos\pi^2}{\sqrt{1 - 2e^2\sin\pi^2 + e^4\sin\pi^2 - 2e_2^2\cos\lambda^2\cos\pi^2 + c_2^4\cos\lambda^2\cos\pi^2}}.$$

§ 27.

Der Winkel zwischen dem Meridian und der Centralebene.

Man hat folgendes Liniensystem:

Normale: $p,\ q,\ r,$
Centrale: $f,\ g,\ h,$
Z-Axe: $0,\ 0,\ 1.$

Ein Perpendikel zur Centrale und Z-Axe hat die Richtung

$$l = -\frac{g}{\sqrt{f^2+g^2}}, \quad m = \frac{f}{\sqrt{f^2+g^2}}, \quad n = 0.$$

Senkrecht auf dieser Linie steht die Tangente uvw des Meridians. Man hat daher zur Ermittelung dieser letzteren die Gleichungen

$$pu + qv + rw = 0,$$
$$-gu + fv \qquad = 0.$$

Daraus entwickeln sich die folgenden Werthe:

$$u = \frac{-f.r}{t}, \quad v = \frac{-g.r}{t}, \quad w = \frac{fp+g.q}{t}.$$

Ferner hat man für die Senkrechte $l_1 m_1 n_1$ zur Normale und Centrale die Richtungsgrössen

$$l_1 = \frac{hq - gr}{t_1}, \quad m_1 = \frac{fr - hp}{t_1}, \quad n_1 = \frac{gp - fq}{t_1}.$$

Aus beiden Linien bestimmt man den gesuchten Winkel i, wie folgt:

$$\sin i = -\frac{fr\,(hq-gr)}{tt_1} - \frac{gr\,(fr-hp)}{tt_1} + \frac{(fp+gq)\,(gp-fq)}{tt_1} = \frac{gp-fq}{tt_1}\cos\varepsilon,$$
$$= -\frac{(a^2-b^2)\,pq\cos\varepsilon}{tt_0t_1} = -\frac{(a^2-b^2)\,pq\,\mathrm{cotg}\,\varepsilon}{t_0t}.$$

Der Nenner nimmt folgende Gestalt an:

$$t^2t_0^2 = t_0^2\,(f^2+g^2)\,r^2 + t_0^2\,(fp+gq)^2 = (a^4p^2 + b^4q^2)\,r^2 + (a^2p^2 + b^2q^2)^2$$
$$= a^4\cos\pi^2\,[1 - 2e_2^2\cos\lambda^2 + e_2^4\cos\lambda^2\,(1 - \cos\pi^2\sin\lambda^2)].$$

Setzt man diesen Ausdruck ein, so kommt schliesslich

$$80) \qquad \sin i = \frac{-e_2^2\cos\lambda\sin\lambda\cos\pi\,\mathrm{cotg}\,\varepsilon}{\sqrt{1 - 2e_2^2\cos\lambda^2 + e_2^2\cos\lambda^2\,(1 - \cos\pi^2\sin\lambda^2)}}.$$

Will man nur eine angenäherte Formel haben, so kann man auch hier die vierten Potenzen von e_2 hinweglassen. Dadurch erhält die vorige Gleichung die einfachere Gestalt:

81) $$\sin i = -\frac{e_2^2 \cos\lambda \sin\lambda}{e^2 \sin\pi}.$$

Für kleine Polhöhen ist diese Formel nicht zu gebrauchen; sie giebt aber bald die gesuchte Grösse mit der erwünschten Genauigkeit, wenn man zu höheren Breiten übergeht. Berechnet man nach derselben für $\lambda = 135^0$ verschiedene Werthe des Winkels i, so kommt:

für $\pi = 0$ ist $180 - i = 90^0$,
„ „ $= 30^0$ „ „ $= 2^0\ 9'$,
„ „ $= 40^0$ „ „ $= 1^0 40'$,
„ „ $= 50^0$ „ „ $= 1^0 24'$,

für $\pi = 60^0$ ist $180 - i = 1^0 14'$,
„ „ $= 70^0$ „ „ $= 1^0\ 8'$,
„ „ $= 80^0$ „ „ $= 1^0\ 5'$.

§ 28.

Winkelunterschied zwischen dem Central- und Normalschnitt.

Bezeichnet man die Winkel zwischen der Richtung der grössten Krümmung einerseits und dem Centralschnitt, dem Normalschnitt und der Centralebene andererseits beziehungsweise mit φ_1, a_1 und i_1, so hat man folgendes Liniensystem:

die Tangente des Centralschnitts:	$\cos\varphi_1$,	$\sin\varphi_1$,	0,
„ Sehne:	$\cos a_1 \cos q$,	$\sin a_1 \cos q$,	$\sin q$,
„ Centrale:	$\sin\varepsilon \cos i_1$,	$\sin\varepsilon \sin i_1$,	$\cos\varepsilon$.

Man bestimmt nun eine Senkrechte zur Ebene des Centralschnitts, benutzt dazu, wie in § 7, einmal die Tangente dieser Curve, das andere Mal die Sehne, und erhält auf diese Art folgende Gleichungen:

$$l = \sin q \sin\varepsilon \sin i_1 \qquad m = \cos q \cos\varepsilon \cos a_1 \qquad n = \ldots,$$
$$\quad - \cos q \cos\varepsilon \sin a_1, \qquad - \sin q \sin\varepsilon \cos i_1,$$
$$l = \sin\varphi_1 \cos\varepsilon, \qquad m = -\cos\varphi_1 \cos\varepsilon, \qquad n = \ldots.$$

Dadurch kommt ferner

$$\frac{l}{m} = -tg\,\varphi_1 = \frac{\sin q \sin\varepsilon \sin i_1 - \cos q \cos\varepsilon \sin a_1}{\cos q \cos\varepsilon \cos a_1 - \sin q \sin\varepsilon \cos i_1} = \frac{\sin a_1 - tg\,q\ tg\,\varepsilon \sin i_1}{\cos a_1 - tg\,q\ tg\,\varepsilon \cos i_1},$$

und schliesslich

$$\sin(\varphi_1 - a_1) = tg\,q\ tg\,\varepsilon \sin(\varphi_1 - i_1).$$

Zwischen den Grössen i und i_1 des vorigen und dieses Paragraphen besteht die Relation

$$i + \varphi_0 = i_1,$$

und bezüglich der Azimuthe a und φ und der Grössen a_1 und φ_1 hat man die Gleichungen

$$a = a_1 - \varphi_0 - \eta_0, \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_0 - \eta_0.$$

Daraus folgt

$$\varphi_1 - a_1 = \varphi - a \text{ und } \varphi_1 - i_1 = \varphi - i + \eta_0.$$

Setzt man diese Werthe ein, so ergiebt sich schliesslich für den gesuchten Winkelunterschied die Gleichung

82) $$\sin(\varphi - a) = tg\, q\, tg\, \varepsilon \sin(\varphi - i + \eta_0).$$

§ 29.

Die spärische Correction.

Durch die Entwickelungen der vorigen Paragraphen hat man nun auch die sphärische Correction erhalten. Bekanntlich ist dieselbe aus den beiden Winkeldifferenzen $\varphi - a$ und $\alpha - \varphi$ zusammengesetzt. Die erstere kann man mittels der Gleichung 82), die letztere durch die Formeln des § 24 berechnen.

Es ist hier am Orte, auf einen Unterschied hinzuweisen, welcher zwischen den sphärischen Correctionen des zweiaxigen und dreiaxigen Ellipsoids besteht. Beim Sphäroid verschwinden die Winkeldifferenzen $(\varphi - a)$ und $(\alpha - \varphi)$ beide in der Richtung der grössten Krümmung; beim dreiaxigen Ellipsoid hingegen hat der Winkel $\varphi - a$ seinen Nullpunkt in der Richtung der Centralebene. Im ersteren Falle gestalten sich demnach die sphärischen Correctionen symmetrisch gegen die Richtung der Hauptkrümmung; im letzteren Falle hingegen wird die symmetrische Lage derselben durch eine Linie angezeigt, welche sich zwischen dem Hauptschnitte und der Centralebene befindet. Der Unterschied in der Richtung dieser beiden Linien hängt von den Winkeln i und q ab und ist in mittleren Breiten, wo die Grösse des erstgedachten Winkels kaum 1 bis 2^0 beträgt, sehr gering; für kleine Winkel q kann er in solchen Fällen ganz vernachlässigt werden.

Wenn man einen Theil der Erdoberfläche in innige Berührung mit einem Sphäroid bringt, so wird der Meridian des letztern nahe mit der Linie zusammenfallen, gegen welche die sphärischen Correctionen symmetrisch liegen. Mit Bezugnahme auf das eben Erörterte folgt daher, dass bei kleinen Flächentheilen der Meridian des berührenden Sphäroids genau die Richtung der Krümmungslinie der berührten Fläche anzeigt; bei grösseren Flächentheilen hingegen findet eine kleine Abweichung nach der Seite der Centralebene statt.

§ 30.

Rectification des Centralschnitts für kleine Linien von 10 bis 15 Meilen Länge.

Die Gleichung 37) lautet

$$ds = \frac{\sqrt{1 + (colg\, \zeta_0 \cos\partial - \varrho_{d_0} C \sin\partial)^2}}{\alpha\beta\varrho_{d_0}\left[1 + \left(\frac{\gamma}{\varrho_{d_0}\alpha\beta} - 1 - \frac{C^2}{\alpha\beta}\right)\sin\partial^2 + 2\frac{(\alpha u l - \beta v m)}{\alpha\beta}\sin\partial\cos\partial\right]^{3/2}}$$

Gebraucht man die Abkürzungen

$$cotg\,\zeta_0 \cos\partial - \varrho_{d_0} C \sin\partial = h\cos\partial - k\sin\partial = q,$$

$$\left(\frac{\gamma}{\varrho_{d_0}\alpha\beta} - 1 - \frac{C^2}{\alpha\beta}\right)\sin\partial^2 + \frac{2(\alpha u l - \beta v m)}{\alpha\beta}\sin\partial\cos\partial$$
$$= m\sin\partial^2 + 2n\sin\partial\cos\partial = \eta,$$

so kommt, wenn man sich mit den ersten Potenzen von η und q^2 begnügt:

$$\alpha\beta\varrho_{d_0}.ds = \frac{\sqrt{1+q^2}}{(1+\eta)^{3/2}} = \left(1+\frac{q^2}{2}\right)(1-\tfrac{3}{2}\eta) = 1 - \tfrac{3}{2}\eta + \frac{q^2}{2},$$

$$\alpha\beta\varrho_{d_0}.ds = \Big(1 - \tfrac{3}{2}m\sin\partial^2 - 3n\sin\partial\cos\partial + \frac{h^2}{2}\cos\partial^2 + \frac{k^2}{2}\sin\partial^2$$
$$- hk\sin\partial\cos\partial\Big)\,d\partial.$$

Setzt man für $\sin\partial^2$ und $\cos\partial^2$ die abgekürzten Reihen ∂^2 und $1-\frac{\partial^2}{4}$ und integrirt dann die vorige Gleichung, so folgt

83) $$\alpha\beta\varrho_{d_0}.s = \left(1+\frac{h^2}{2}\right)\partial - \left(\tfrac{3}{2}n + \frac{hk}{2}\right)\sin\partial^2 - \tfrac{1}{2}m\,\partial^3 + \frac{k^2}{6}\partial^3 - \frac{h^2}{6}\partial^2.$$

Wenn nicht die grösste Schärfe verlangt wird, so kann man noch einige Glieder schwinden lassen und erhält dann

$$\alpha\beta\varrho_{d_0}.s = \left(1+\frac{h^2}{2}\right)\partial - \tfrac{3}{2}n\sin\partial^2.$$

Diese Formel giebt nur noch den Fuss richtig an; kleinere Theile lässt sie unbestimmt. Setzt man für h und n die ursprünglichen Ausdrücke zurück, so kommt schliesslich

84) $$s = \varrho_c \sin\zeta\,.\,\partial - \tfrac{3}{2}(\varrho_1 u\sin\alpha + \varrho_0 v\cos\alpha)\,\varrho_c\sin\zeta^2.\,\partial^2.$$

Auf diese Weise hat man eine Gleichung erhalten, welche unabhängig von der Grösse γ ist und nur dem Flächenelemente angehört.

Hiermit schliessen wir die Discussion des dreiaxigen Ellipsoids. Es kam nur darauf an, durch Aufstellung einer Reihe von Formeln Einsicht davon zu gewinnen, in welcher Weise eine etwa vorhandene Ellipticität des Aequators sich bemerkbar machen und wie sich die Berechnung auf der genannten Fläche ungefähr gestalten würde. Ein specielleres Eingehen auf diesen Gegenstand kann füglich unterbleiben, so lange nicht die Nothwendigkeit vorliegt, ausgedehnte Operationen auf einem dreiaxigen Ellipsoid vornehmen zu müssen.

Cap. IV.

Die Ermittelung der Fläche.

§ 1.

Um die Lage der Flächennormalen bestimmen zu können, müssen, wie aus der Theorie der Linienvielecke hervorgeht, im Allgemeinen sämmtliche Längen, Polhöhen und Azimuthe und ausserdem auch gewisse lineare Grössen bekannt sein. Die Ermittelung der letzteren bildet einen besondern Theil der geodätischen Aufgabe und soll jetzt kurz erörtert werden. Selbstverständlich kann man in der Praxis nur solche Linien wählen, welche sich unmittelbar auf der Erdoberfläche messen lassen, also die Verbindungslinien der Stationspunkte. Denkt man sich sämmtliche dieser Linien zwischen den benachbarten Punkten construirt, so erhält man ein Dreieckssystem, welches im Wege der Triangulation aufgemessen und nach Regeln der Trigonometrie berechnet werden kann. Vor allen Dingen ist aber zu untersuchen, welche Linie sich am vortheilhaftesten als Dreiecksseite behandeln lässt. Eine solche, die ausschliesslich der Fläche angehört, kann man deshalb nicht wählen, weil die Fläche noch unbekannt ist. Anders verhält es sich mit der geraden Verbindungslinie der Punkte; dieselbe hängt gar nicht oder nur wenig von der Fläche ab und ist ihrer Lage nach vollkommen bestimmt, wenn die Höhenwinkel gegeben sind. Will man sich dieser Linien, der Sehnen, zur Bestimmung des Netzes bedienen, so hat man das in § 5, Cap. I, angegebene Verfahren zu beobachten. Die gemessenen Dreieckswinkel werden mittels der Gleichung 38 a) auf das ebene Sehnendreieck reducirt, ihre Summe durch die bekannte Winkelsumme des Dreiecks controlirt und hierauf die Seiten nach den Sätzen der ebenen Trigonometrie berechnet. — Diese Methode bietet eine grössere Genauigkeit, als andere, und ist auch weniger abhängig von den Dimensionen des Dreiecks; dessen ungeachtet pflegt man ihr folgendes Verfahren vorzuziehen: In § 6, Cap. I, ist gezeigt worden, dass kleine Liniendreiecke, und mit solchen hat man es hier hauptsächlich zu thun, ohne merklichen Fehler als sphärische behandelt werden können. Beachtet man nun, dass sich jedes kleine sphärische Dreieck — nach der bekannten Methode von Legendre — wiederum wie ein ebenes berechnen lässt, so stellt sich dadurch ein Verfahren heraus, wonach das Dreiecksnetz auf leichtere und einfachere Weise ermittelt werden kann, als mittels der Sehnenmethode. Man hat nur von jedem beobachteten Dreieckswinkel $\frac{1}{3}$ des sphärischen Excesses abzuziehen und von einer gegebenen Standlinie aus successive alle übrigen Seiten des Netzes mittels der so reducirten Winkel nach den Regeln der ebenen Trigonometrie zu berechnen. — Den sphärischen Excess ermittelt man nicht aus den gemessenen Drei-

eckswinkeln, sondern man berechnet denselben mit weit grösserer Genauigkeit aus der annähernd bekannten Erdoberfläche.

Das arithmetische Mittel aus den beiden Hauptkrümmungsradien eines mittleren Dreieckspunktes giebt, wie die Formel 43), Cap. I, zeigt, einen genäherten Werth des mittleren Radius r_0, und sobald dieser bekannt ist, kann man durch die 40), Cap. I, den gesuchten Winkelüberschuss leicht berechnen.

Es soll schliesslich noch bemerkt werden, dass die Berechnung des Dreiecksnetzes an sich weniger schwierig ist, als die Ausgleichung der Beobachtungsfehler, die ihr vorangehen muss. Ein specielles Eingehen auf diesen Gegenstand würde uns aber hier zu weit abführen.

§ 2.

Sobald das geodätische Netz ausgeglichen und berechnet worden ist, müsste nun zur Ausgleichung der astronomischen Coordinaten geschritten werden. Eine solche kann aber nur dann vorgenommen werden, wenn sämmtliche dieser Grössen beobachtet worden sind oder etwaige Lücken in den bezüglichen Beobachtungen nur vereinzelt auftreten. Man ersieht dies aus der Theorie der Linienvielecke, wonach keine der astronomischen Grössen als eine überschüssige betrachtet und mithin auch keine Bedingungsgleichung für dieselben aufgestellt werden kann, sobald nicht ausser den beiden Polhöhen ebensowohl die beiden Azimuthe, als auch die Länge gegeben sind. Die aus einer vollständigen Beobachtung des Linienzweiecks resultirende Bedingungsgleichung lässt sich ohne Schwierigkeit aus den Formeln des § 2, Cap. I, entnehmen, wenn die astronomischen Punkte unmittelbar mit einander verknüpft sind. Ist dies aber nicht der Fall, so macht es sich nöthig, vor allen Dingen erst die directe Verbindung zwischen den gedachten Punkten herzustellen. Man bedient sich dabei des folgenden Verfahrens: Durch frühere Gradmessungen hat man schon die Elemente desjenigen Sphäroids, welches mit der Erdoberfläche die innigste Berührung eingeht, ziemlich genau kennen gelernt. Betrachtet man nun dieses Sphäroid als eine Hilfsfläche und trägt mittels desselben nach den Regeln des vorigen Capitels von einem Centralpunkte aus die astronomischen Coordinaten auf alle anderen Punkte über, so erhält man aus den Differenzen zwischen den beobachteten und den übertragenen Grössen diejenigen Data, welche zur Aufstellung der Bedingungsgleichung nöthig sind. Man wird selbstverständlich dieses Verfahren nicht gern auf solche Punkte ausdehnen, deren Entfernung vom Centralpunkte eine zu beträchtliche ist.

Stellt man nun die so ermittelten Bedingungsgleichungen zusammen, fügt denselben auch diejenigen bei, welche ihren Grund in dem einfachen Umstande haben, dass die Summe sämmtlicher Längen einer geschlossenen Figur $=0$ ist, und behandelt sie alle nach der Methode der kleinsten Qua-

drate, so folgen schliesslich die wahrscheinlichsten Werthe der astronomischen Coordinaten.

§ 3.

Nun kann man endlich zur genauen Ermittelung der Fläche, d. h. desjenigen Sphäroids übergehen, welches sich der Erdoberfläche am besten anschliesst. Dazu werden ebenfalls die bereits im vorigen Paragraphen erwähnten Differenzen zwischen den übertragenen und beobachteten Coordinaten verwandt. Diese Grössen hängen von den Elementen des Sphäroids ab, welches zum Uebertragen der astronomischen Coordinaten benutzt worden ist; denn sobald eine andere Hilfsfläche substituirt wird, ändern sich auch die gedachten Unterschiede. Es kommt nun darauf an, diejenige Fläche zu finden, durch welche die Quadratsumme sämmtlicher Unterschiede ein Minimum wird. Zu diesem Behufe sind die mehrerwähnten Grössen als Functionen der Flächenconstanten darzustellen. Jede Differenz zwischen den beobachteten und übertragenen Coordinaten giebt eine Bedingungsgleichung für diese Constanten. Fasst man alle derartigen Gleichungen zusammen und behandelt sie nach der Methode der kleinsten Quadrate, so resultiren schliesslich die Elemente desjenigen Sphäroids, welches der Erdoberfläche am besten entspricht.

Allgemeine Anwendung kann dieses Verfahren jedoch nicht finden, da es unsicher und beschwerlich wird, wenn ein grosser Theil der Erdoberfläche bestimmt werden soll. In solchen Fällen zerlegt man das Ganze in kleinere Theile, ermittelt jeden dieser Theile für sich und verknüpft sie dann mit einander auf geeignete Weise.

§ 4.

In § 9, Cap. II, ist gezeigt worden, wie ein Element der Erdoberfläche bestimmt werden kann. Es liegt nun die Frage nahe, ob sich die dort erörterte Methode nicht auch auf grössere Flächentheile ausdehnen lasse. Dies könnte in der That ohne Weiteres geschehen, wenn sämmtliche Punkte des Dreiecksnetzes astronomisch bestimmt worden wären. Man würde dann im Stande sein, alle diese Punkte mit einem Centralpunkte durch Linienzweiecke zu verbinden und durch die Berechnung dieser Figuren diejenigen Data erhalten, welche zur Ermittelung der Fläche nöthig sind. In der Praxis hat man aber nur einen kleinen Theil astronomisch bestimmter Punkte, und wollte man dieselben über grössere Strecken hinweg in der Weise verbinden, dass man die Coordinaten mittels einer Hilfsfläche überträgt, so würde das in § 3 angegebene Verfahren der Flächenermittelung das einfachere sein.

Unter Umständen kann aber doch auch die in Rede stehende Methode benutzt werden, selbst wenn nicht alle Punkte astronomisch bestimmt wor-

den sind. Die mittlere Länge einer Dreiecksseite beträgt ungefähr 10 Meilen; dadurch stellt sich für die Diagonale zweier zusammenstossender, nahezu gleichseitiger Dreiecke die Länge von ungefähr 17 Meilen heraus. Auf diese Länge hin begeht man nur einen geringen Fehler, wenn man das Azimuth unabhängig von der Fläche nach den Regeln der sphärischen Trigonometrie berechnet und dadurch die beiden Endpunkte der Diagonale mit einander in Verbindung setzt. Sind nun im Bereich aller Diagonalen, welche von einem Centralpunkte ausgehen, soviel astronomisch bestimmte Punkte vorhanden, als man zur Ermittelung des Flächentheils nöthig hat, so lässt sich diese Ermittelung ähnlich wie die der Flächenelemente ausführen. Man wird also auch hier damit beginnen, sämmtliche Linienzweiecke und mit ihnen die sphärischen Correctionen, sowie die Winkel ∂ zwischen den Flächennormalen zu berechnen. Die Entfernungen s zwischen den Dreieckspunkten sind bereits bekannt oder können leicht ermittelt werden. Drückt man nun diese Grössen durch die Elemente des Ellipsoids aus, so folgen in Hinsicht auf die 22), 82) und 84) die Gleichungen

$$w = tg\,q\ tg\,\varepsilon\ sin\,(\varphi - i + \eta_0) - \varrho_1\,d\,cos\,\varphi\ sin\,\varphi + \tfrac{1}{2}\varrho_1{}^2\,d^2\,\varrho_1\,\sigma\ sin\,\varphi\ cos\,\varphi^3,$$
$$s = \varrho\,\partial\ sin\,\zeta - \tfrac{3}{2}\,(\varrho_1\,u\,sin\,\alpha + \varrho_0\,v\,cos\,\alpha)\,\varrho\ sin\,\partial^2\ sin\,\zeta^2.$$

Jedes Linienzweieck liefert zwei solcher Gleichungen. Als Unbekannte treten darin die Grössen φ, ϱ_0, ϱ_1, u und v auf; ε und i sind Functionen von u und v. Für die übrigen Grössen sind theils genaue, theils genäherte Werthe gegeben; so hat man $q = \frac{\partial}{2}$, $sin\,\zeta = cos\,w$ und für α das schon annähernd bekannte Azimuth der Richtung zu setzen.

Um die Unbekannten zu finden, werden aus den vorigen Gleichungen die Differentialgleichungen entwickelt, darauf für sämmtliche Grössen diejenigen Werthe gesetzt, welche dem Bessel'schen Sphäroid entsprechen und schliesslich die Verbesserungen derselben nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt. — Wenn nicht bedeutende locale Störungen auftreten, so sind i, η_0 und u kleine Grössen, die meistentheils vernachlässigt werden können. Setzt man in solchen Fällen für ε und v die betreffenden Werthe aus dem Bessel'schen Sphäroid, so bleiben blos die drei Unbekannten ϱ_0, ϱ_1 und φ zu ermitteln.

§ 5.

Wenn sämmtliche Flächenelemente in der vorhin beschriebenen Weise bestimmt worden wären, so käme es nun darauf an, sie zu einem Ganzen zu vereinigen, d. h. den analytischen Ausdruck derjenigen Fläche zu suchen, welche alle ermittelten Elemente ihrer Lage und Grösse nach in sich schliesst. So allgemein, wie eben angedeutet, soll jedoch hier die Aufgabe nicht behandelt werden; in der Praxis begnügt man sich damit, sie auf die Ermittelung desjenigen dreiaxigen Ellipsoids zu beschränken,

welches mit dem betreffenden Theile der Erdoberfläche die innigste Berührung eingeht.

Seiner Grösse nach ist dieses Ellipsoid schon annähernd durch das Bessel'sche Sphäroid gegeben; was jedoch die Lage desselben — und zwar insbesondere die Lage der Axen des Aequators, d. h. die Grösse des Winkels λ — betrifft, so bleibt noch ein genäherter Werth zu ermitteln. Da man annehmen muss, dass im Falle eines dreiaxigen Ellipsoids die Z-Axe desselben von der Rotationsaxe der Erde nur um ein Weniges abweicht, so kann man die beobachtete Richtung der Mittagslinie mit der Richtung des Meridians dieses Ellipsoids identificiren. Unter dieser Voraussetzung ist durch die Ermittelung des Flächenelements auch der Winkel bekannt geworden, welchen die Richtung der Hauptkrümmung mit dem Meridian bildet. Jedes Flächenelement liefert daher nach § 22, Cap. III, eine Gleichung von der Form

$$tg\,2\varphi_0 = -\frac{-e_2^2\,sin\,2\lambda\,sin\,\pi}{-e_2^2\,cos\,2\lambda - e^2\,cos\,\pi + e_2^2\,cos\,\lambda^2\,cos\,\pi^2}.$$

Daraus lassen sich die Länge λ und die Excentricität e_2 des Aequators, welche Letztere übrigens hierbei nur von untergeordneter Bedeutung ist, ermitteln.

Nunmehr sind für sämmtliche Grössen, welche zur Bestimmung des Ellipsoids nöthig sind, genäherte Werthe gegeben. Für die drei Axen desselben liefern die zwei Axen des Bessel'schen Sphäroids diese Werthe; die beiden Winkel, welche den Unterschied zwischen der Richtung der Z-Axe und der Richtung der Rotationsaxe angeben, werden als Differentialien betrachtet und haben demnach den genäherten Werth 0, und was schliesslich die Länge λ betrifft, so ist vorhin eben das Nöthige erörtert worden.

Zur genauen Ermittelung dieser sechs Unbekannten kann man die geeignetsten der Formeln 66), 67), 70), 71) und 72), nachdem sie auf eine Axe bezogen worden sind, deren Richtung nur um einen kleinen Winkel von der Richtung der Z-Axe verschieden ist, in Anwendung bringen. Jedes Flächenelement, von welchem die beiden Hauptkrümmungsradien und die Richtung der Hauptschnitte bestimmt worden sind, liefert drei Gleichungen. Sämmtliche dieser Gleichungen sind zusammenzufassen und nach der Methode der kleinsten Quadrate zu behandeln.

§ 6.

Die Methode, mittels der Flächenelemente oder wenigstens mittels sehr kleiner Flächentheile die generelle Fläche zu bestimmen, hat manche Vorzüge. Man kennt von vielen Dreieckspunkten die Richtung der Hauptschnitte und ist daher in den Stand gesetzt, alle Krümmungslinien der Fläche annähernd genau zu construiren. Diese Linien lassen die charakteristischen Eigenschaften der Fläche sehr scharf hervortreten; es wird

dadurch ohne Weiteres ersichtlich, wo beträchtliche locale Störungen vorkommen, wo sich wellenförmige Erhöhungen und Vertiefungen zeigen, und man wird daher auch leicht beurtheilen können, welche Punkte bei der Ermittelung des generellen Ellipsoids heranzuziehen sind und welche hinwegbleiben müssen. — Die in Rede stehende Methode könnte übrigens auch dann vortheilhafte Verwendung finden, wenn man die Aufgabe der Flächenermittelung allgemeiner auffassen und bis zu Flächen dritten oder höheren Grades hinaufsteigen wollte. Ein Mittel zur Lösung dieser Aufgabe würde die in § 6, Cap. II, erwähnte Rolllinie abgeben.

Auf diese Vortheile wird man jedoch verzichten müssen, so lange nicht die nöthige Anzahl astronomisch bestimmter Punkte vorhanden ist. Die englische Gradmessung, von der gesagt wird, dass sie sich durch eine grosse Anzahl solcher Punkte auszeichne, enthält bei überhaupt 218 Dreieckspunkten 32 Polhöhen-, 30 Azimuthal- und wenige Längenbestimmungen. Um aber die oben erörterte Methode anwenden zu können, müssten mindestens $\frac{1}{3}$ der Dreieckspunkte, also im erwähnten Falle wenigstens 70 bis 80 Punkte nach Polhöhe, Azimuth und Länge bestimmt worden sein.

In Ermangelung der erforderlichen Anzahl astronomischer Beobachtungen ist man daher genöthigt, auf das im § 3 erörterte Verfahren zurückzugehen. Die Vereinigung der verschiedenen Flächentheile kann jedoch immerhin nach Angabe des vorigen Paragraphen bewerkstelligt werden, wenn man denselben nur eine mässige Ausdehnung giebt und sie tief ineinandergreifen lässt.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

91947

As Sonderhof, A
S Ein Beitrag zur höhern Geodäsie.

UNIVERSITY OF TORONTO
LIBRARY

DO NOT
REMOVE
THE
CARD
FROM
THIS
POCKET